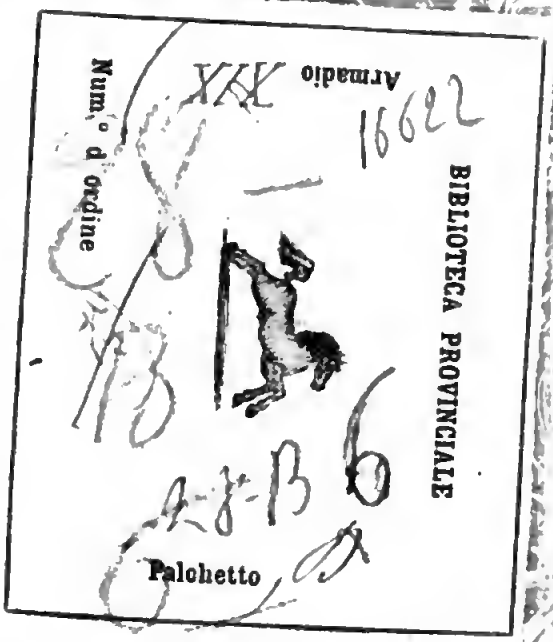
Sonetti Pizzofalcone



R. BIBLIOTECA
NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
1215
NAPOLI

B. Gov.
II
1215

Digitized by Google

3w
10432

TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE

POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Académicien Honoraire de l'Académie Royale des Sciences.*

BIBLIOTECA NAPOLI

A PARIS,

Chez MOUTARD, Libraire de la REINE, de MADAME, & de Madame la COMTESSE D'ARTOIS, Quai des Auguſtins, près du Pont S. Michel, à S. Ambroiſe.

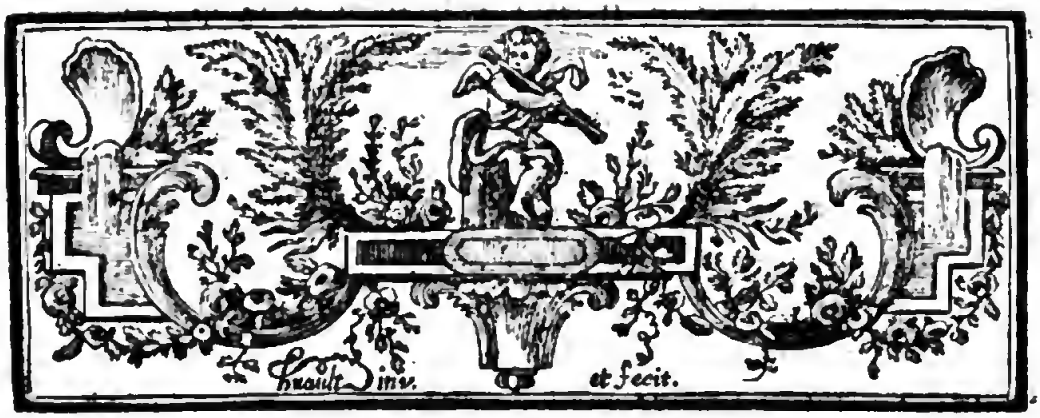
M. DCC. LXXVI.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.

Chez BARROIS l'aîné, Libraire, rue de Savoie, n°. 23.

Digitized by Google

N B. On trouve chez le même Libraire, *l'Analyſe des Infiniment petits*, du même Auteur, avec *les Commentaires du P. Paulian*, 1 vol. in-8°. fig. 6 l.



AVERTISSEMENT
DU LIBRAIRE.

L'Illustre & ſçavant Auteur de cet Ouvrage étoit ſur le point de le donner au Public, lorſqu'il mourut âgé ſeulement de quarante-trois ans : ce fut au commencement de 1704. Le Manuſcrit étoit ſans Préface, que ce ſeul Auteur pouvoit bien faire : c'eſt pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre ſuffira ſans doute aux Connoiſſeurs, pour voir de quelle conſéquence en Géométrie eſt la matiere de ce Livre ; & la grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre, répond auſſi aſſez, ce me ſemble, de l'habileté avec laquelle j'ai appris que cette matiere y eſt traitée. C'eſt ce qui m'a déterminé à réimprimer ce Livre tel qu'il étoit, ſur la premiere édition de M. Boudot, en 1707, ſans autre ſoin que de faire en ſorte qu'il le fût le plus correctement poſſible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût bien veiller à l'impreſſion. C'eſt auſſi ce que la conſidération

des Sçavans pour l'Auteur, & l'eſtime pour l'Ouvrage, m'ont fait heureuſement trouver. J'oſe eſpérer que les Mathématiciens & ſurtout les jeunes Géometres, qui doivent le regarder comme devant leur faciliter l'entrée à la ſublime Analyſe des Infiniment petits *de l'Auteur, me ſçauront gré d'avoir réimprimé ce Livre, dont les Exemplaires étoient devenus rares dans le commerce.*

TRAITÉ

TRAITÉ ANALYTIQUE

DES SECTIONS CONIQUES,

Et de leur uſage pour la Réſolution des Équations dans les Problêmes, tant déterminés qu'indéterminés.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole.

DÉFINITIONS.

I.

AYANT placé ſur un plan une Régle *BC*, & une Équerre *GDO*, en ſorte que l'un de ſes côtés *DG* ſoit couché le long de cette régle, on prendra un fil *FMO* égal en longueur à l'autre côté *DO* de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extrêmité *O* de ce côté *DO*, & l'autre bout en un point quelconque *E* pris ſur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la régle. Maintenant FIG. 1.

si l'on fait glisser le côté DG de l'équerre le long de la régle BC, & qu'en même tems l'on se serve d'un style M pour tenir toujours le fil tendu, & sa partie MO toute jointe & comme collée contre le côté OD de l'équerre ; la courbe AMX que le style M décrit dans ce mouvement, est une portion de Parabole.

Si l'on renverse l'équerre de l'autre côté du point fixe F, on décrira en la même façon l'autre portion AMZ de la même Parabole ; de sorte que la ligne XAZ ne fera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne BC dans laquelle le bord inférieur de la régle immobile BC touche le plan & le côté DG de l'équerre GDO, est appellée *Directrice*.

3.

Le point fixe F du plan, est nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on mene du point fixe F, sur la directrice BC une perpendiculaire FE qui rencontre la parabole au point A ; la ligne AF indéfiniment prolongée du côté de F, est appellée *l'Axe* de la parabole.

5.

La ligne p quadruple de AF, est appellée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme MP menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, sont appellées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme MO menées des points de la parabole parallélement à l'axe, en sont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

COROLLAIRE I.

1. IL ſuit de la définition de la Parabole, que ſi l'on tire par un de ſes points quelconques *M* au foyer *F* une ligne droite *MF*, & ſur la directrice *BC* une perpendiculaire *MD*; les droites *MF*, *MD*, ſeront toujours égales entre elles. Car ſi l'on retranche du côté *OD* de l'équerre & du fil *OMF* qui * lui eſt égal, la partie commune *OM*, il eſt viſible que les parties reſtantes *MD*, *MF*, ſeront toujours égales entre elles. * *Déf.* 1.

COROLLAIRE II.

2. DE-LA il eſt évident, que ſi l'on mene une ligne droite quelconque *KK* parallèle à la directrice *BC*, & que d'un point quelconque *M* de la parabole, on tire ſur cette ligne la perpendiculaire *MK*, & au foyer la droite *MF*; la différence ou la ſomme *KD* des deux droites *MF*, *MK*, ſera toujours la même: ſavoir la différence lorſque le point *M* tombe au-deſſous de *KK*, & la ſomme lorſqu'il tombe au-deſſus.

COROLLAIRE III.

3. IL eſt évident que *FE* eſt diviſée en deux parties égales par la parabole au point *A*. Car ſuppoſant que le point *M* tombe au point *A*, la ligne *MF* tombe ſur *AF*, & la ligne *MD* ſur *AE*, qui ſeront par conſéquent égales entre elles; puiſque *MF* eſt toujours * égale à *MD*, en quelque endroit de la parabole que tombe le point *M*. * *Art.* 1.

COROLLAIRE IV.

4. DE-LA on voit comment on peut décrire une parabole *XAZ*, l'axe *AP* dont le point *A* eſt l'origine étant donné, avec ſon paramètre *p*. Car ayant pris ſur l'axe *AP* de part & d'autre du point *A* les parties *AF*, *AE* égales chacune au quart de ſon paramètre *p*, & mené par le point *E* la perpendiculaire indéfinie *BC* ſur *FE*; ſi l'on couche le bord inférieur d'une régle ſur cette ligne

BC qui ſert de directrice, & que par le moyen d'une équerre ODG, & d'un fil FMO égal au côté OD, & attaché par l'un de ſes bouts au foyer F, & par l'autre bout à l'extrêmité O de ce même côté, l'on décrive une Parabole XAZ comme l'on a enſeigné dans la définition premiere, il eſt viſible qu'elle ſera celle qu'on demande.

Il n'eſt pas moins viſible que plus le côté OD de
* *Déf.* 1. l'équerre & le fil OMF (qui * lui doit être égal) ſera long, plus auſſi la portion de la parabole qu'on décrira ſera grande; de ſorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté OD de l'équerre & le fil OMF.

COROLLAIRE V.

5. SI d'un point quelconque M de la Parabole l'on mene une ordonnée MP à l'axe, & au foyer F la droite MF; il eſt clair que cette ligne $MF = AP + AF$,
* *Art.* 3. puiſque $MF = MD = AP + AE$, & que * $AF = AE$.

PROPOSITION I.

Théorême.

FIG. 1. 6. *LE quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* AP, *eſt égal au rectangle du parametre* p, *par la partie* AP *de l'axe priſe entre ſon origine* A *& la rencontre* P *de l'ordonnée.*

Il faut prouver que $\overline{MP}^2 = p \times AP$.

Ayant nommé la donnée AF, m; & les indéterminées
* *Art.* 5. AP, x; PM, y; on aura $MF =$ * $m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, ſelon que le point p ſe trouve au-deſſous ou au-deſſus du foyer F. Or le triangle rectangle MPF donne en l'un & l'autre cas $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2$ $(yy) + \overline{PF}^2$ $(mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puiſque ſelon la 5e définition $p = 4m$, on aura auſſi $yy = px$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. IL eſt donc évident que ſi l'on nomme p le parametre de l'axe AP; chacune de ſes parties AP, x; & chacune de ſes ordonnées correſpondantes PM, y; on aura toujours $yy=px$. Or comme cette propriété convient à tous les points de la parabole, & en détermine la poſition par rapport à ſon axe AP; il s'enſuit que l'équation $yy=px$ exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à ſon axe. FIG. 2.

COROLLAIRE II.

8. SI l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe AP, leurs quarrés ſeront entr'eux comme les parties AP & AQ de l'axe, priſes entre ſon origine A & les rencontres P & Q de ces mêmes ordonnées. Car * $\overline{PM}^2.\overline{QN}^2::p\times AP.p\times AQ::AP.AQ$. FIG. 2. * Art. 6, 7.

COROLLAIRE III.

9. SI l'on mene par un point quelconque P de l'axe AP une parallèle MPM à ſes ordonnées; elle rencontrera la parabole en deux points M & M également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M & M ſoient à la parabole, il faut * que les quarrés de chaque PM (y) priſe de part & d'autre du point P, ſoient égaux chacun au même rectangle px. * Art. 7.

COROLLAIRE IV.

10. IL ſuit de ce que * $yy=px$, que plus AP (x) eſt grande, plus auſſi l'ordonnée PM (y) priſe de part & d'autre de l'axe AP augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus AP (x) diminue, plus auſſi l'ordonnée PM (y) devient petite: de ſorte que AP (x) étant nulle ou zéro, chaque PM (y) priſe de part & d'autre de l'axe AP devient auſſi nulle; c'eſt-à-dire que le point P tombant en A, les deux points de rencontre M & M ſe réu- * Art. 7.

Digitized by Google

niſſent en ce point. D'où il eſt clair:

1°. Que ſi l'on mene par l'origine A de l'âxe une ligne LL parallèle à ſes ordonnées, elle ſera tangente en A.

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de ſon axe AP à commencer par ſon origine A; & qu'ainſi toute parallèle comme LM à l'axe AP, ne rencontre la parabole qu'en un ſeul point M, & paſſe au-dedans, puiſque ſa diſtance de l'axe demeure par-tout la même.

COROLLAIRE V.

11. SI d'un point quelconque M de la parabole l'on tire une parallèle ML à l'axe AP, laquelle rencontre en L la parallèle AL à ſes ordonnées; il eſt clair en menant l'ordonnée MP, que $AL=PM\,(y)$, & que $ML=AP\,(x)=\frac{yy}{p}$, puiſque * $px=yy$. D'où il ſuit que les droites $ML\left(\frac{yy}{p}\right)$, $ML\left(\frac{yy}{p}\right)$ priſes de part & d'autre de l'axe AP ſont égales entr'elles, lorſque les points L, L ſont également éloignés du point A; & partant que ſi une ligne quelconque MM terminée par la parabole eſt coupée en deux parties égales par l'axe en P, elle ſera parallèle à la ligne LL, c'eſt-à-dire qu'elle ſera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les parallèles ML, ML à l'axe AP, il eſt évident que LL ſera diviſée par le milieu en A, puiſque MM l'eſt en P. Les droites ML, ML, ſeront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par conſéquent la ligne MM ſera parallèle à LL.

* *Art.* 7.

COROLLAIRE VI.

12. IL ſuit de ce que toutes les perpendiculaires MPM à l'axe AP, terminées de part & d'autre par la parabole, ſont * coupées par le milieu en P; que l'axe diviſe la parabole en deux portions entiérement égales & ſemblablement poſées de part & d'autre. Car ſi le plan ſur lequel elle eſt tracée, étoit plié le long de l'axe enſorte

* *Art.* 9.

Digitized by Google

que les deux parties ſe joigniſſent, il eſt viſible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une ſur l'autre.

PROPOSITION II.

Théorême.

13. SI *l'on mene par l'origine* A *de l'axe* AP *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un ou l'autre des angles* PAL, PAL, *faits par l'axe* AP *& par la ligne* LL *parallèle à ſes ordonnees ; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole* MAM *en un autre point* M. FIG. 3.

Ayant pris ſur *AL* de part ou d'autre du point *A* la partie *AG* égale au parametre *p* de l'axe, & tiré *GF* parallèle à l'axe *AP*, & qui rencontre la ligne *AM* (prolongée s'il eſt néceſſaire) au point *F*; on prendra ſur la ligne *AL* du même côté où tombe la ligne *AM* par rapport à l'axe *AP*, la partie *AL* égale *GF*; & ayant tiré *LM* parallèle à l'axe, je dis que le point *M* où cette ligne rencontre la droite *AM*, ſera à la parabole *MAM*.

Car menant *MP* parallèle à *AL*, les triangles ſemblables *FGA*, *APM*, donneront *FG* ou *AL* ou *PM*. *GA*:: *AP*. *PM*. Et partant $\overline{PM}^2 = GA\,(p) \times PA$. La ligne *PM* ſera donc * une ordonnée à l'axe *AP*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 7.

COROLLAIRE I.

14. DE-LA on voit comment l'axe *AP* d'une parabole *MAM* étant donné avec parametre *p*, & ayant mené par l'origine *A* de l'axe dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*, faits par l'axe *AP* & par la ligne *LL* parallèle à ſes ordonnées, une ligne droite quelconque *AM*; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver ſur cette ligne le point *M* où elle rencontre la parabole *MAM*.

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

15. IL eſt évident * qu'il n'y a que la ligne LAL parallèle aux ordonnées à l'axe AP, qui puiſſe être tangente de la parabole MAM au point A origine de l'axe; puiſqu'il n'y a que cette ſeule ligne qui paſſant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

* *Art.* 10; 13.

DÉFINITIONS.

9.

Fig. 4 & 5. Si l'on mene par un point quelconque M de la parabole un diametre MO, une ordonnée MP à l'axe AP, & une ligne droite MT qui coupe ſur l'axe AP prolongé au-delà de ſon origine A, la partie AT égale à AP; toutes les lignes droites, comme NO, menées des points de la parabole parallèlement à MT, & terminées par le diametre MO, ſont appellées *Ordonnées* à ce diametre.

10.

Si l'on prend la ligne q troiſieme proportionnelle à AT, MT; cette ligne q ſera nommée le *Parametre* du diametre MO.

COROLLAIRE I.

16. SI l'on nomme l'indéterminée AP ou AT, x; il eſt clair que $\overline{MT}^2 = qx$, puiſque $AT\,(x).\,MT :: MT.\,q$.

COROLLAIRE II.

17. A Cauſe du triangle rectangle MPT, le quarré $\overline{MT}^2\,(qx) = \overline{PT}^2\,(4xx) + \overline{MP}^2$ * (px); d'où, en diviſant par x, l'on tire $q = 4x + p$.

* *Art.* 7.

C'eſt-à-dire que le paramètre q d'un diametre quelconque MO, ſurpaſſe le parametre p de l'axe du quadruple de $AP\,(x)$.

COROLLAIRE III.

18. SI l'on tire du point M au foyer F la droite MF, on aura MF * $= AP + AF$. Or ſelon la définition 5e. le

* *Art.* 5.

le parametre de l'axe étant $p = 4AF$, le parametre du diametre MO ſera * $q = 4AP + 4AF$. Donc le parametre q d'un diametre quelconque MO, vaut quatre fois la ligne MF tirée de ſon origine M au foyer F. * *Art.* 17.

PROPOSITION III.

Théorême.

19. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* MO, *eſt égal au rectangle du parametre* q, *par la partie* MO *de ce diametre, priſe entre ſon origine* M *& la rencontre* O *de l'ordonnée.* FIG. 4 & 5.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 = q \times MO$.

Ayant mené l'ordonnée NQ à l'axe AP, laquelle rencontre le diametre MO au point R, & tiré OH parallèle à MP, on nommera les données AP ou AT, x; PM ou RQ, y; & les indéterminées OR ou HQ, a; MO ou PH, b; les triangles ſemblables TPM, ORN, donneront cette proportion $TP\ (2x).\ PM\ (y) :: OR\ (a).\ RN = \frac{ay}{2x}$. Cela poſé.

Puiſque (*fig.* 4.) $NQ = RQ\,(y) - RN\left(\frac{ay}{2x}\right)$, ou $RN\left(\frac{ay}{2x}\right) - RQ\,(y)$, & $AQ = AH\,(x+b) - HQ\,(a)$, lorſque le point N tombe du côté de l'axe AP par rapport au diametre MO; & qu'au contraire (*fig.* 5.) $NQ = RQ\,(y) + RN\left(\frac{ay}{2x}\right)$, & $AQ = AH\,(x+b) + HQ\,(a)$, lorſqu'il tombe du côté oppoſé: on aura $\overline{QN}^2 = yy \mp \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, & $AQ = x + b \mp a$, ſavoir — dans le premier cas, & + dans le ſecond. Or * $AP\ (x).\ AQ\ (x+b\mp a) :: \overline{PM}^2\ (yy).\ \overline{QN}^2 = yy + \frac{byy}{x} \mp \frac{ayy}{x}$. On formera donc en comparant enſemble ces * *Art.* 8.

deux valeurs de $\overline{QN}^2$, l'égalité $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$; d'où en effaçant de part & d'autre $yy + \frac{ayy}{x}$, diviſant par yy, & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR}^2 (aa) = 4bx$. Mais les triangles ſemblables MPT, NRO, donnent $\overline{PT}^2 (4xx). \overline{OR}^2 (4bx) :: \overline{MT}^2 * (qx). \overline{ON}^2 = bq = q \times MO (b)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* *Art.* 16.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

20. IL eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la propoſition premiere par rapport à l'axe AP, à ſes ordonnées PM, & à ſon parametre p, s'étend par le moyen de cette derniere propoſition à un diametre quelconque MO, à ſes ordonnées ON, & à ſon parametre q. Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15, ſe tirent de la premiere propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que les angles APM ſoient droits, ou bien qu'ils ne le ſoient pas; il s'enſuit que ſi l'on imagine dans ces articles que la ligne AP, au lieu d'être l'axe, ſoit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites PM, QN, & pour parametre la ligne p, ils ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition; car leur démonſtration demeurera la même, il ne faut pour s'en convaincre entiérement, que les relire, en mettant par-tout où ſe trouve le mot d'*axe*, celui de *diametre*.

COROLLAIRE II.

Fig. 4 & 5.

15. COMME les articles 10 & 15 ſubſiſtent avec la même force, lorſque la ligne AP au lieu d'être l'axe, eſt un diametre quelconque, tel que MO; il s'enſuit que la ligne MT parallèle aux ordonnées ON à ce diametre, eſt tangente en M, & qu'il n'y a que cette ſeule ligne qui puiſſe toucher la parabole en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné ſur une parabole, on ne peut mener qu'une ſeule tangente.

COROLLAIRE III.

22. DE-LA il eſt évident ſelon la définition 9 que ſi l'on mene par un point quelconque *M* d'une parabole, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe ſur l'axe prolongé du côté de ſon origine *A*, la partie *AT* égale à *AP*; cette ligne *MT* ſera tangente en *M*. Et réciproquement que ſi la ligne *MT* eſt tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'axe; les parties *AT*, *AP*, de l'axe ſeront égales entr'elles.

COROLLAIRE IV.

23. SI l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la derniere propoſition, que la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, ſoit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*; on verra que cette propoſition ſera encore vraie, puiſqu'elle ſe démontrera de la même maniere qu'auparavant, comme il eſt évident par la ſeule inſpection de la fig. 6 où les triangles ſemblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe. FIG. 6.

D'où il ſuit 1°. Que le Corollaire précédent doit encore avoir lieu, lorſque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, eſt un diametre quelconque. 2°. Que le diametre *MO* peut être l'axe dans cette ſuppoſition; & qu'ainſi on peut regarder l'axe comme un diametre qui fait avec ſes ordonnées des angles droits.

PROPOSITION IV.

Théorême.

24. SI *par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à l'axe, & une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui paſſe par le point* M; *je dis que la partie* PG *de l'axe ſera toujours égale à la moitié de ſon paramètre* p. FIG. 7.

Il faut prouver que PG $= \frac{1}{2}$ p.

Car à cauſe des angles droits TPM, TMG, on aura $TP\ (2x).\ PM\ (y) :: PM\ (y).\ PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$, en mettant à la place de yy ſa valeur * px.

* *Art.* 7.

PROPOSITION V.

Théorême.

FIG. 7. 25. SI *par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene au foyer* F *la droite* MF, *un diametre* MO, *& une tangente* TMS; *les angles* FMT, OMS, *faits par la tangente* TMS *d'un côté avec la droite* MF, *& de l'autre avec le diametre* MO, *ſeront égaux entr'eux.*

Car menant l'axe AP qui rencontre en T la tangente TMS, & l'ordonnée MP à l'axe; on aura * $TA + AF$ ou $TF = AP + AF$ ou * MF. Le triangle TFM ſera donc iſoſcelle; & par conſéquent l'angle FTM, ou ſon égal OMS, ſera égal à l'angle FMT. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 22.

* *Art.* 5.

COROLLAIRE.

26. DE-LA il eſt clair que la tangente TMS prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laiſſe la parabole toute entiere du côté de ſon foyer F. Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant M, il s'enſuit que cette ligne courbe eſt concave dans toute ſon étendue autour de ſon foyer F.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 8 & 9. 27. UN *diametre* AP *avec la tangente* LAL *qui paſſe par ſon origine* A, *& ſon parametre étant donnés; trouver un diametre* BQ *qui faſſe de part ou d'autre avec ſes ordonnées, un angle égal à l'angle donné* K, *ſon origine* B, *& ſon parametre.*

Digitized by Google

Ayant mené par l'origine A du diametre donné la ligne AE qui faſſe avec ce diametre de part ou d'autre, l'angle PAE égal à l'angle donné K, & trouvé * ſur cette ligne (prolongée de l'autre côté de A lorſqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles PAL, PAL) le point M où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu Q de la ligne AM, une parallèle QD au diametre AP, qui rencontre la tangente AL au point D; & on diviſera QD par le milieu en B. Je dis que la ligne BQ eſt le diametre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point B, & pour parametre une troiſieme proportionnelle à BQ, & QA.

* *Art.* 14 & 20.

Car 1°. La ligne AM étant diviſée en deux parties égales au point Q par le diametre BQ, elle ſera ordonnée * de part & d'autre à ce diametre; & comme les lignes BQ, AP ſont parallèles entr'elles, l'angle BQA que fait le diametre BQ avec ſon ordonnée QA ſera égal à l'angle PAM égal à l'angle donné K ou à ſon complement à deux droits. 2°. Le point du milieu B de la ligne QD ſera l'origine * de ce diametre, puiſque AQ en eſt une ordonnée. 3°. Le parametre du diametre BQ eſt * la troiſieme proportionnelle à BQ, QA

* *Art.* 11 & 20.

* *Art.* 22 & 23.

* *Art.* 19.

Lorſque l'angle donné K n'eſt pas droit, il eſt clair qu'on peut mener de part & d'autre du diametre AP deux différentes lignes AE qui faſſent avec ce diametre des angles égaux à l'angle donné K; & qu'ainſi on pourra toujours avoir deux ſolutions différentes, en obſervant que ſi l'une des deux lignes AE tomboit ſur la tangente AL, le diametre donné AP ſatisferoit lui-même à la queſtion. Mais lorſque cet angle K eſt droit, comme l'on ne peut mener qu'une ſeule ligne AE qui faſſe avec le diametre AP un angle droit, il s'enſuit qu'on ne peut avoir alors qu'une ſolution; & qu'ainſi * le diametre cherché ſera l'axe.

FIG. 8.

FIG. 9.

* *Art.* 23.

Il eſt à remarquer que les deux diametres BQ, BQ, qui ſatisfont au Problême lorſque l'angle donné K n'eſt pas droit, ſont ſemblablement poſés de part & d'autre

FIG. 10.

de l'axe AP, & que leurs parametres ſont égaux : ce qui ſe voit par la conſtruction même, en ſuppoſant que le diametre donné AP ſoit l'axe, & en menant deux différentes lignes AE, AE de part & d'autre. Car les tri ngles rectangles ALM, ALM, & ADQ, ADQ étant viſiblement égaux & ſemblables entr'eux, les lignes AD, AD; DQ, DQ; leurs moitiés BQ, BQ; & les ordonnées QA, QA ſeront égales entr'elles; * & par conſéquent les parametres le ſeront auſſi.

* *Art.* 19.

COROLLAIRE.

28. IL eſt donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un ſeul diametre qui faſſe avec ſes ordonnées des angles droits; & qu'ainſi il ne peut y avoir qu'un ſeul axe. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux différens diametres, qui faſſent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit; que ces deux diametres ſeront ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

PROPOSITION VII.

Problême.

29. UN *diametre étant donné avec la tangente qui paſſe par ſon origine, & ſon parametre; décrire la parabole par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 11. * Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit ſelon l'article 4e; mais lorſqu'il ne l'eſt pas, ſoit MO le diamètre donné, & TMS la tangente qui paſſe par ſon origine M. Cela poſé :

On prendra ſur le diametre MO prolongé au-delà de ſon origine M, la partie MD égale au quart de ſon parametre; & on tirera une perpendiculaire indéfinie DE à MD. On menera MF qui faſſe avec la tangente TMS un angle FMT égal à l'angle OMS; & ayant pris MF égale à MD, on décrira ſelon la définition

Digitized by Google

premiere, une parabole qui ait pour directrice la ligne DE, & pour foyer le point F. Je dis qu'elle ſera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne MO étant perpendiculaire à la directrice DE, ſera parallèle à l'axe; & par conſéquent un diametre ſelon la définition 7e. 2°. La ligne TMS ſera * tangente en M. 3°. Le parametre du diametre MO ſera * quadruple de MF. * *Art.* 15. * *Art.* 18.

SECONDE MANIERE.

Soit AP le diametre donné, & LAL la tangente qui paſſe par ſon origine A. Cela poſé. FIG. 12.

Ayant pris ſur le diametre AP prolongé au-delà de ſon origine A la partie AG égale à ſon parametre, & mené une droite indéfinie DGD qui faſſe avec AG l'angle AGD égal à l'angle GAL pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie DM le long de GD toujours parallèlement à AG, en entraînant par ſon extrêmité D le côté DA de l'angle DAM égal à l'angle GAL, & mobile par ſon ſommet autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M de la ligne DM & du côté AM, décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant MP parallèle à AL, les lignes MP, GD ſeront égales entr'elles; puiſque l'angle APM ou GAL étant égal à l'angle AGD, elles ſeront également inclinées entre les paralleles GP, DM. Or les triangles AGD, MPA ſont ſemblables: car l'angle MPA ou GAL eſt égal à l'angle AGD, & l'angle PMA ou MAL égal à l'angle GAD, puiſque retranchant des angles égaux GAL, DAM, le même angle DAL, les reſtes doivent être égaux. On aura donc $AG.\ GD$ ou $PM :: PM.\ AP$, & partant $GA \times AP = \overline{PM}^2$; d'où il eſt clair que PM eſt * une ordonnée au diametre AP qui a pour origine le point A, pour tangente la ligne LAL, & pour parametre la ligne AG. *Ce qu'il falloit, &c.* * *Art.* 19. & 21.

Si le diametre AP étoit l'axe, alors les lignes GD, FIG. 13.

AL, seroient parallèles, & la démonstration deviendroit plus facile ; car l'on voit tout d'un coup que GD est égale à PM, & que les triangles rectangles AGD, MPA sont semblables ; d'où il suit $AG.\ GD$ ou $PM :: PM.\ AP$. Donc $AG \times AP = \overline{PM}^2$, &c.

PROPOSITION VIII.

Problême.

30. UN *diametre* AP *étant donné avec son parametre, & la tangente* AL *qui passe par l'origine* A *de ce diametre ; trouver autant de différens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui est la même chose) la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 14. Ayant pris sur le diametre AP prolongé au-delà de son origine A, la partie AG égale à son parametre, divisé AG en deux parties égales au point D, & mené une ligne droite indéfinie AF perpendiculaire à AG ; on décrira d'un point C pris partout où l'on voudra sur DA prolongée indéfiniment du côté de A, comme centre, & du rayon CG, un arc de cercle PF qui coupera le diametre AP & sa perpendiculaire AF en deux points P, F. On menera par le point P une parallèle MPM à la tangente AL, sur laquelle on prendra de part & d'autre les parties PM, PM, égales chacune à AF. On trouvera de la même maniere autant de couple de points M que l'on voudra ; par lesquels on fera passer une ligne courbe MAM qui sera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs PF passant par le même point G, & ayant leurs centres sur la ligne GA prolongée, s'il est nécessaire du côté de A, auront pour diametres les lignes GP ; & par conséquent la propriété de ces cercles donnera toujours $\overline{AF}^2 = GA \times AP$. Mais chaque PM est * égale à sa correspondante AF, & de plus parallèle

* *Hyp.*

à

à la tangente AL qui paſſe par l'origine A du diametre AP ; elle ſera donc * ordonnée à ce diametre. C'eſt pourquoi la Parabole qu'on demande, doit paſſer par tous les points M, trouvés comme l'on vient d'enſeigner.

* *Art.* 19 & 21.

Il eſt viſible qu'on peut ſe tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés ; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être ſenſible, lorſque ces points ſont fort près les uns des autres. Ceux qui ont beſoin de décrire ſouvent des Sections Coniques, préferent ordinairement cette méthode, de les décrire par pluſieurs points ; parce que les machines dont on ſe ſert pour les décrire par un mouvement continu, étant compoſées, ſont ſouvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par un point quelconque L de la tangente AL, une parallèle indéfinie LE au diametre AP ; on prendra ſur cette ligne & ſur le diametre AP prolongé au-delà de ſon origine A, les parties LE, EE, EE, &c. AF, FF, FF, &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera ſur LE, le point M, enſorte que LM ſoit troiſieme proportionnelle au parametre donné du diametre AP, & à la partie AL de la tangente. On tirera enfin des points A, M, les lignes AE, AE, AE, &c. MF, MF, MF, &c ; je dis que les points d'interſection N, N, N, &c. de chaque AE, avec la correſpondante MF, ſeront tous à la parabole qu'on demande. Fig. 15.

Car menant par le point marqué M, & par l'un des points trouvés N, les lignes MP, NQ, parallèles à la tangente AL, & nommant AP, x ; PM ou AL, y ; AQ, u ; QN, z ; les triangles ſemblables NQA, ALE, & MPF, NQF, donneront ces deux proportions QN (z). QA (u) :: AL (y). LE ou $AF = \frac{uy}{z}$. & MP

(y). PF ou $PA + AF\left(x + \frac{uy}{z}\right) :: NQ\,(z)$. QF ou $QA + AF\left(u + \frac{uy}{z}\right)$. D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy + \frac{uyy}{z} = xz + uy$; & effaçant de part & d'autre uy, & multipliant par z, il vient $uyy = xzz$, qui se réduit à cette proportion $AP\,(x)$. $AQ\,(u) :: \overline{MP}^2\,(yy)$. $\overline{NQ}^2\,(zz)$. Or par la construction, le quarré de AL ou de PM, est égal au rectangle de la partie AP du diametre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre AP; & par conséquent QN en sera * une autre. Ainsi le point N sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre AP: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies LE, AF, les parties égales LE, EE, &c. AF, FF, &c. de l'autre côté des points, L, A.

* *Art.* 19 & 21.

* *Art.* 8 & 20.

Si au lieu du parametre du diametre AP que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points M de la parabole; ce qui arrive souvent: il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallèle indéfinie LE, au diametre AP, & achever le reste comme ci-dessus.

LIVRE SECOND.

DE L'ELLIPSE.

DÉFINITIONS.

1.

AYANT attaché ſur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la diſtance *Ff* ſoit moindre que la longueur du fil, on ſe ſervira d'un ſtile *M*, pour tenir ce fil toujours tendu ; & conduiſant ce ſtile autour de ces deux points, enſorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce ſtile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui ſera nommée *Ellipſe*. FIG. 16.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premier Axe *Aa*, eſt nommé le *Centre* de l'Ellipſe.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *ſecond* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, ſont appellés enſemble, *Conjugués* : de ſorte que le premier Axe *Aa*, eſt dit conjugué au ſecond *Bb* ; & réciproquement le ſecond *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* de l'Ellipſe parallèlement à l'un des Axes, & terminées par

l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe : ainſi MP eſt Ordonnée à l'Axe Aa, & MK à l'Axe Bb.

8.

La troiſieme proportionnelle aux deux Axes, eſt appellée *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion. Ainſi ſi l'on fait comme le premier Axe Aa, eſt au ſecond Axe Bb, de même le ſecond Bb, à une troiſieme proportionnelle p ; cette ligne p ſera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui paſſent par le centre C, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'Ellipſe, ſont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rençontre l'Ellipſe qu'en un ſeul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

FIG. 17. 31. SI l'on conçoit que les deux foyers F, f, & le centre C ſe réuniſſent en un ſeul point ; il eſt viſible que l'Ellipſe ſe changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite CM, égale à la moitié de la corde CMC, attachée par ces deux bouts au point C, qui en ſera le centre. On pourra donc conſidérer un cercle comme une eſpèce particuliere d'Ellipſe, dans laquelle la diſtance des foyers eſt nulle ; de ſorte que tout ce qu'on démontrera dans la ſuite de l'Ellipſe, telle que puiſſe être la diſtance de ces deux foyers, ſe peut auſſi appliquer au cercle, en ſuppoſant que cette diſtance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

FIG. 16. 32. IL ſuit de la définition premiere, que ſi l'on mene d'un point quelconque M de l'Ellipſe, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf ; leur ſomme ſera toujours la même.

COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point M tombe en A, il eſt viſible que MF devient AF, & que Mf devient Af: de même lorſque le point M tombe en a, il eſt encore viſible que MF devient aF, & que Mf devient af. On aura donc $AF+Af$, ou $2AF+Ff=aF+af$, ou $2af+fF$; & partant $AF=af$. D'où il ſuit:

1°. Que la ſomme des deux droites MF, Mf, eſt toujours égale au premier axe Aa, puiſque $Mf+MF=Af+AF=Af+fa$.

2°. Que la diſtance Ff des foyers, eſt diviſée en deux parties égales par le centre C, puiſque $CA-AF$ ou $CF=Ca-af$ ou Cf.

COROLLAIRE III.

34. SI de l'extrêmité B du ſecond axe Bb, l'on mene aux deux foyers F, f, les droites BF, Bf; il eſt clair que les triangles rectangles BCF, BCf, ſeront égaux; & qu'ainſi l'hypothénuſe BF, eſt égale à l'autre hypothénuſe Bf: & par conſéquent BF, ou $Bf=CA$ ou Ca, puiſque * $BF+Bf=Aa$. On trouve de même que Fb ou $bf=CA$ ou Ca. D'où l'on voit: * *Art.* 33.

1°. Que le ſecond axe Bb, eſt diviſé en deux parties égales par le centre C; car les triangles rectangles FCB, FCb ſeront égaux, puiſqu'ils ont des hypothénuſes égales FB, Fb, & le côté FC commun.

2°. Que le ſecond axe Bb, eſt toujours moindre que le premier Aa; puiſque ſa moitié BC étant l'un des côtés du triangle rectangle BCF, ſera moindre que ſon hypothénuſe BF, qui eſt égale à la moitié CA du premier axe Aa.

3°. Que ſi l'on décrit de l'une des extrêmités B du petit ou ſecond axe Bb comme centre, & du rayon BF égal à CA, moitié du premier ou grand axe Aa, un cercle; il coupera ce grand axe en deux points F, f, qui ſeront les deux foyers de l'Ellipſe.

Digitized by Google

COROLLAIRE IV.

35. LES mêmes choſes étant poſées, ſi l'on nomme CA ou BF, t; CF, m; le triangle rectangle BCF, donnera $\overline{BC} = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF \times Fa = tt - mm$. D'où il eſt évident que le quarré de la moitié CB du petit axe Bb, eſt égal au rectangle de AF par Fa parties du grand axe Aa, priſes entre l'un des foyers F, & ſes deux extrêmités A, a.

COROLLAIRE V.

* *Art.* 34. 36. IL ſera facile à préſent de décrire une Ellipſe dont les deux axes Aa, Bb, ſont donnés. Car ayant trouvé * ſur le premier ou grand axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans ces points, les extrêmités d'un fil FMf, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipſe comme l'on a enſeigné dans la définition premiere, il eſt évident qu'elle ſera celle qu'on demande.

PROPOSITION I.

Théorême.

FIG. 16. 37. SI *l'on mene l'ordonnée* MP *au premier ou grand axe* Aa, *& qu'on prenne ſur cet axe la partie* AD *égale à* MF; *je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé, comme auparavant, les données CA, t; CF, m; & de plus les indéterminées CP, x; PM, y; & l'inconnue CD, z; il peut arriver deux différens cas.

Premier cas. Lorſque le point P tombe au-deſſus du centre C. Comme PF eſt toujours moindre que Pf; il s'enſuit que MF ou AD ſera moindre que Mf ou aD; c'eſt pourquoi AD ou $MF = t - z$, aD ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ (ſelon que le point P tombe au-deſſous ou au-deſſus du foyer F), $Pf = x + m$. Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt -$

$2tz+zz=yy+mm-2mx+xx$, & $tt+2tz+zz=yy+mm+2mx+xx$. Donc ſi l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la ſeconde, on aura $4tz=4mx$; d'où l'on tire $CD\,(z)=\frac{mx}{t}$.

Second cas. Lorſque le point P tombe au-deſſous du centre C, comme PF eſt toujours plus grande que Pf, il s'enſuit que MF ou AD, ſera plus grande que Mf ou aD: c'eſt pourquoi AD ou $MF=t+z$, aD ou $Mf=t-z$, $PF=x+m$, $Pf=x-m$ ou $m-x$ (ſelon que le point P tombe au-deſſous ou au-deſſus du foyer f). Or les triangles rectangles MPF, MPf donnent $tt+2tz+zz=yy+mm+2mx+xx$, & $tt-2tz+zz=yy+mm-2mx+xx$. Donc ſi l'on retranche par ordre chaque membre de la ſeconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz=4mx$; d'où l'on tire encore $CD\,(z)=\frac{mx}{t}$. Par conſéquent en l'un & l'autre cas, on aura $CA\,(t).\ CF\,(m)::CP\,(x).\ CD\,(z)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

38. IL eſt donc évident que ſi l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toujours $MF=t-\frac{mx}{t}$, & $Mf=t+\frac{mx}{t}$, lorſque le point P tombe au-deſſus du centre C: & qu'au contraire on aura $MF=t+\frac{mx}{t}$, & $Mf=t-\frac{mx}{t}$, lorſqu'il tombe au-deſſous.

PROPOSITION II.

Théorême.

39. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* Aa, *eſt au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe, comme le quarré de ſon conjugué* Bb, *eſt au quarré de l'axe* Aa.

Digitized by Google

Il faut prouver que $\overline{PM}.AP \times Pa :: \overline{Bb}.\overline{Aa}$.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'article précédent, ſi l'on met dans l'égalité $tt \pm 2tz + zz = yy$ $+ mm \pm 2mx + xx$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z ſa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toujours celle-ci $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}\,(yy).\ AP \times Pa\,(tt - xx) :: \overline{BC}$ * $(tt - mm).\ \overline{CA}\,(tt) :: \overline{Bb}.\overline{Aa}$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* *Art.* 37.

* *Art.* 35.

COROLLAIRE I.

40. SI l'on mene une ordonnée MK à l'autre axe Bb, lequel j'appelle $2c$, il eſt clair que $MK = CP\ (x)$, & que $CK = PM\ (y)$. Or * $\overline{PM}\,(yy).\ AP \times Pa$ $(tt - xx) :: \overline{Bb}\,(4cc).\ \overline{Aa}\,(4tt)$. Et partant $4cc - xx = 4cctt - 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}\,(xx).\ BK \times Kb\ (cc - yy) :: \overline{Aa}\,(4tt).\ \overline{Bb}$ $(4cc)$.

* *Art.* 39.

C'eſt-à-dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK à l'axe Bb, eſt au rectangle de BK par Kb parties de cet axe, comme le quarré de ſon conjugué Aa, eſt au quarré de l'axe Bb.

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

FIG. 18. 19. 41. SI l'on nomme l'un ou l'autre axe Aa, $2t$; ſon conjugué Bb, $2c$; ſon parametre p; chacune de ſes ordonnées PM, y; chacune de ſes parties CP priſes entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura * toujours $\overline{PM}\,(yy).\ AP \times Pa\,(tt - xx) :: \overline{Bb}$ $(4cc).\ \overline{Aa}\,(4tt) :: p.\ Aa\,(2t)$. Puiſque ſelon la définition du Parametre, $Aa\,(2t).\ Bb\,(2c) :: Bb\,(2c).$ $p = \frac{4cc}{2t}$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion $yy.\ tt - xx :: 4cc.\ 4tt$, & enſuite

* *Art.* 39.

enſuite de l'autre $yy.\ tt - xx :: p.\ 2t$. L'on tire $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, & $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. Or comme cette propriété convient également à tous les points de l'Ellipſe, & qu'elle en détermine la poſition par rapport aux deux axes conjugués Aa, Bb; il s'enſuit que l'équation $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, ou $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipſe par rapport à ſes axes.

COROLLAIRE III.

42. SI l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ, à l'axe Aa; leurs quarrés ſeront entr'eux comme les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car * $\overline{Bb}.\overline{Aa} :: \overline{PM}.AP \times Pa :: \overline{QN}.AQ \times Qa$. Et partant $\overline{PM}.\overline{QN} :: AP \times Pa.AQ \times Qa$. * *Art.* 39.

COROLLAIRE IV.

33. SI l'on mene par un point quelconque P de l'un des axes conjugués Aa, une parallèle MM à l'autre axe Bb; elle rencontrera l'Ellipſe en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, ſoient à l'Ellipſe, il faut * que les quarrés de $PM\ (y)$ priſe de part & d'autre de l'axe Aa, ſoient égaux chacun à la même quantité $cc - \frac{ccxx}{tt}$. * *Art.* 41.

COROLLAIRE V.

44. IL ſuit de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que plus $CP\ (x)$ priſe de part & d'autre du centre C augmente, plus chaque ordonnée $PM\ (y)$ priſe de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe Aa, diminue; de ſorte que $CP\ (x)$ étant égale à CA ou $Ca\ (t)$, chaque $PM\ (y)$ devient alors nulle ou zéro: & qu'au contraire plus $CP\ (x)$ devient petite, plus auſſi chaque ordonnée $PM\ (y)$ priſe * *Art.* 41.

de part & d'autre de l'axe Aa augmente ; de ſorte que $CP\,(x)$ devenant zéro, chaque $PM\,(y)$, qui eſt alors CB ou $Cb\,(c)$, ſera la plus grande des ordonnées. D'où il eſt clair :

1°. Que ſi l'on mene par les extrêmités B, b, de l'un des axes conjugués, des parallèles à l'autre ; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipſe s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe Aa, en commençant par l'extrêmité A, juſqu'à ce qu'elle rencontre ſon conjugué Bb ; après quoi elle va toujours en s'approchant du même axe Aa, juſqu'à ce qu'elle le rencontre en ſon autre extrêmité a.

COROLLAIRE VI.

45. IL ſuit encore de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C ; les ordonnées PM, PM, ſeront égales. D'où il eſt évident que ſi une ligne quelconque MM, terminée par l'Ellipſe, eſt coupée en deux également par l'un des axes conjugués Bb en un point K autre que le centre ; elle ſera parallèle à l'autre Aa. Car menant les parallèles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP ſera diviſée par le milieu en C, puiſque MM l'eſt en K ; & partant les ordonnées PM, PM, ſeront égales. La droite MM ſera donc parallèle à l'axe Aa.

* *Art.* 41.

COROLLAIRE VII.

46. SI l'on conçoit que le plan ſur lequel l'Ellipſe eſt tracée, ſoit plié le long d'un des axes Bb, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent ; il eſt clair que les deux demi-Ellipſes BAb, Bab, tomberont exactement l'une ſur l'autre ; ſçavoir, les points A, M, &c. ſur a, M, &c. puiſque * toutes les perpendiculaires Aa, MM, &c. à cet axe, ſont coupées par le milieu aux points C, K, &c. D'où il eſt viſible que l'Ellipſe eſt coupée par les deux axes en quatre

* *Art.* 45.

portions parfaitement égales & uniformes, qui ne diffé-rent entr'elles que par leur ſituation.

PROPOSITION III.

Théorême.

47. SI *l'on mene par l'une des extrémités* A *de l'un des axes* A a, *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un des angles* aAL, aAL, *faits par cet axe, & par la ligne* LAL *parallèle a ſon conjugué* Bb ; *je dis qu'elle rencontrera l'Ellipſe en un autre point* M. FIG. 20.

Ayant pris ſur AL de part ou d'autre du point A, la partie AG égale au parametre p de l'axe Aa, & tiré GF parallèle à cet axe, & qui rencontre la ligne AM (prolongée, s'il eſt néceſſaire) au point F, on prendra ſur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe Aa, la partie AL égale à GF, & ayant tiré par l'autre extrêmité a de l'axe Aa la droite aL ; je dis que le point M où elle coupe la ligne AM, eſt à l'Ellipſe MAM.

Car menant MP parallèle à AL, & nommant les connues $Aa, 2t$; AG, p ; GF ou AL, a ; & les inconnues CP, x ; PM, y ; les triangles ſemblables AGF, MPA, & LAa, MPa, donneront $AG\,(p)\ GF\,(a) :: MP\,(y).\ AP\,(t \pm x) = \frac{ay}{p}$. Et $AL\,(a).\ Aa\,(2t) :: PM\,(y).\ aP\,(t \mp x) = \frac{2ty}{a}$. Et par conſéquent on aura toujours $AP \times Pa\ (tt - xx) = \frac{2tyy}{p}$, ſoit que le point P tombe au-deſſus ou au-deſſous du centre C ; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée à l'axe Aa ; & partant le point M ſera à l'Ellipſe MAM. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 41.

COROLLAIRE I.

48. DE-LA on voit comment un axe Aa d'une Ellipſe MAM étant donné avec ſon parametre p, &

ayant mené par l'une des extrêmités A de cet axe, une ligne droite quelconque AM dans l'un ou l'autre des angles aAL, aAL, faits par cet axe, & par la ligne LAL parallèle à ſon conjugué Bb; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver ſur cette ligne le point M où elle rencontre l'Ellipſe MAM.

COROLLAIRE II.

49. IL eſt évident qu'il n'y a que la ligne LAL parallèle à l'axe Bb, qui puiſſe être tangente de l'Ellipſe MAM au point A, l'une des extrêmités de ſon conjugué Aa; puiſqu'il n'y a que cette ſeule ligne, qui paſſant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

PROPOSITION IV.

Théorême.

FIG. 20. 50. TOUS *les diametres comme* MCm, *ſont coupés en deux également par le centre* C, *& ils ne rencontrent l'Ellipſe qu'en deux points* M, m.

Ayant mené l'ordonnée MP, & pris Cp égale à CP, ſi l'on mene la perpendiculaire pm terminée en m par la droite MCm; il eſt évident que les triangles CPM, Cpm ſont ſemblables & égaux, & qu'ainſi CM eſt égale à Cm, & PM à pm. Or comme * les ordonnées qui ſont également éloignées de part & d'autre du centre C, ſont égales entr'elles, & que PM eſt une ordonnée, il s'enſuit que pm ſera auſſi une ordonnée; & par conſéquent que le point m eſt à l'Ellipſe.

* *Art.* 45.

De plus il eſt viſible que ſi l'on imagine une parallèle à l'axe Bb, qui ſe meuve de C vers A; la partie de cette parallèle renfermée dans l'angle ACM, ira toujours en augmentant à meſure que CP croît, & qu'au contraire la partie de cette parallèle renfermée entre le quart d'Ellipſe AMB & l'axe CA, c'eſt-à-dire, l'ordon-

Digitized by Google

née PM * ira toujours en diminuant ; d'où il ſuit que la ligne droite CM, qui paſſe par le centre, ne rencontre l'Ellipſe qu'en un point M du même côté de l'axe ; & il en eſt de même pour le point m pris de l'autre côté. Donc, &c. * *Art.* 44.

DÉFINITIONS.

11.

Si l'on mene par un point quelconque M de l'Ellipſe, un diametre MCm, une ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa, & une ligne droite MT, en ſorte que CT ſoit troiſieme proportionnelle à CP, CA ; le diametre SCs parallèle à MT, eſt appellée *Diametre conjugué* au diametre Mm ; & réciproquement le diametre Mm eſt dit conjugué au diametre Ss : de ſorte que les deux enſemble ſont appellés *Diametres conjugués.* Fig. 21, 22.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipſe parallèlement à l'un de ces deux diametres, & terminées par l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre. Ainſi NO parallèle au diametre Ss, eſt Ordonnée à ſon conjugué Mm.

13.

La troiſieme proportionnelle à deux diametres conjugués, eſt appellée *Parametre* du premier de la proportion. Ainſi la troiſieme proportionnelle à Mm, Ss, eſt appellée *Parametre* du diametre Mm.

COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée CA, t ; & les indéterminées CP, x ; PT, s ; il eſt clair, ſelon la définition 11e que $CT(x+s)=\frac{tt}{x}$; & qu'ainſi $sx=tt-xx=AP\times Pa$.

PROPOSITION V.

Théorême.

52. SI *l'on mene par les extrêmités* M, S, *de deux diametres conjugués* Mm, Ss, *deux ordonnées* MP, SK, *à un axe* Aa : *je dis que la partie* CK *de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées* SK, *eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties* AP, Pa, *faites par la rencontre de l'autre ordonnée* MP.

Il faut prouver que $\overline{CK}^2 = AP \times Pa$.

Ayant nommé les connues CA, t; CP, x; PT, s; & l'inconnue CK, m; on aura $AP \times Pa = tt - xx =$ * sx, & $AK \times Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour tt ſa valeur $xx + sx$. Cela poſé, la propriété de l'Ellipſe* donnera $AP \times Pa (sx). AK \times Ka (sx + xx - mm) :: \overline{PM}^2 . \overline{KS}^2 :: \overline{TP}^2 . (ss). \overline{CK}^2 (mm)$. a cauſe des triangles ſemblables TPM, CKS. D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en tranſpoſant à l'ordinaire, $\overline{CK}^2 (mm) = \frac{sxx + ssx}{x + s} = sx = AP \times Pa$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 51.

* *Art.* 42.

COROLLAIRE.

53. PUISQUE $\overline{CK}^2 = tt - xx$, il s'enſuit que $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2$ ou $AK \times Ka = xx$. Or * $\overline{CA}^2 (tt). \overline{CB}^2 (cc) :: AK \times Ka (xx). \overline{SK}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Et $\overline{CA}^2 (tt). \overline{CB}^2 (cc) :: AP \times Pa (tt - xx). \overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. De plus à cauſe des triangles rectangles CPM, CKS, on aura le quarré $\overline{CM}^2$ ou $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, & le quarré $\overline{CS}^2$ ou $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Donc $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$.

* *Art.* 41.

C'eſt-à-dire que la ſomme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, eſt égale à la ſomme des quarrés des deux axes Aa, Bb.

PROPOSITION VI.

Théorême.

54. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* Mm, *eſt au rectangle de* MO×Om *fait des parties de ce diametre; comme le quarré de ſon conjugué* Ss, *eſt au quarré du méme diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}.MO\times Om :: \overline{Ss}.\overline{Mm}$.

Ayant mené les parallèles NQ, OH, à l'axe Bb, & la parallèle OR à ſon conjugué Aa, qui rencontre au point R l'ordonnée NQ prolongée, s'il eſt néceſſaire; on nommera les données CP, x; PM, y; CA, t; PT, s; & les indéterminées HQ ou OR, a; CH, b; & on aura à cauſe des triangles ſemblables CPM, CHO, & MPT, NRO, ces deux proportions $CP(x).PM(y) :: CH(b).HO$ ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et $TP(s).PM(y) :: OR(a).RN = \frac{ay}{s}$. Cela poſé.

Puiſque (*fig.* 21.) NQ eſt toujours la différence de $RQ\left(\frac{by}{x}\right)$, $RN\left(\frac{ay}{s}\right)$, & CQ la ſomme de $CH(b)$, $HQ(a)$, lorſque le point N tombe entre les points M, S, ou m, s; & qu'au contraire (*fig.* 22.) NQ eſt toujours la ſomme de RQ, RN, & CQ la différence de CH, HQ, lorſque le point N tombe par-tout ailleurs: on aura $\overline{NQ} = \frac{bbyy}{xx} \mp \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, & $\overline{CQ} = aa \mp 2ab + bb$; ſçavoir $-\frac{2abyy}{sx}$ & $+2ab$ dans le premier cas, & au contraire $+\frac{2abyy}{sx}$ & $-2ab$ dans le ſecond cas. Or * $AP\times Pa(tt-xx).AQ\times Qa$ ou $\overline{CA}-\overline{CQ}(tt-aa\mp 2ab-bb) :: \overline{PM}(yy).\overline{QN} = \frac{ttyy-aayy\mp 2abyy-bbyy}{tt-xx}$. En comparant enſemble ces deux valeurs du quarré de NQ, on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \mp \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy-aayy\mp 2abyy-bbyy}{tt-xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le

* *Art.* 42.

terme $+\frac{2abyy}{sx}$ & de l'autre le terme $+\frac{2abyy}{tt-xx}$ qui lui eſt
* *Art.* 51. égal, puiſque * $sx=tt-xx$, & diviſant par yy, il vient $\frac{bb}{xx}+\frac{aa}{ss}=\frac{tt-aa-bb}{tt-xx}$.

Si l'on multiplie par xx, & qu'on tranſpoſe bb, on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^4}{ssxx}=\frac{ttxx-aaxx-bbtt}{tt-xx}$; & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le ſecond par le quarré de $tt-xx$ valeur de sx (ce qui ſe fait en multipliant ſimplement le numérateur par $tt-xx$) on aura $aax^4=t^4xx-aattxx-bbt^4-ttx^4+aax^4+bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre aax^4, tranſpoſant $aattxx$, & diviſant par $ttxx$, l'on tirera $\overline{HQ}^2$ ou $\overline{OR}^2\,(aa)=tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}$.

Maintenant ſi l'on nomme le demi-diametre CM ou Cm, ζ; on aura à cauſe des triangles ſemblables CPM, CHO, cette proportion $CP\,(x).\,CM\,(\zeta)::CH\,(b).\,CO=\frac{b\zeta}{x}$. Et partant $MO\times Om=\zeta\zeta-\frac{bb\zeta\zeta}{xx}$. Or les triangles ſemblables ORN, CKS, donnent $\overline{ON}^2.\,\overline{CS}^2::\overline{OR}^2.\left(tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}\right)\overline{CK}^2$ * $(tt-xx)::MO\times Om.\left(\frac{xx\zeta\zeta-bb\zeta\zeta}{xx}\right)$. * *Art.* 52. $\overline{CM}^2\,(\zeta\zeta)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, ou trouve le même produit. Donc $\overline{ON}^2.\,MO\times Om::\overline{CS}^2.\,\overline{CM}^2$ * $::\overline{Ss}^2.\,\overline{Mm}^2$. *Ce qu'il falloit, &c.* * *Art.* 50.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

55. IL eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la Propoſition ſeconde par rapport aux deux axes Aa, Bb, s'étend par le moyen de cette propoſition à deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss. Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49 ſe tirent de la ſeconde Propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que l'angle ACB ſoit droit ou qu'il ne le ſoit pas; il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles, que les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres

diametres conjugués quelconques, ils ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition : car leur démonſtration demeurera toujours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entiérement, que les relire en mettant par-tout où ſe trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, ſubſiſtent avec la même force, lorſque les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, ſont deux diametres conjugués quelconques, tels que *Mm*, *Ss* ; il s'enſuit que la ligne *MT* menée par le point *M* l'une des extrêmités d'un diametre quelconque *Mm*, parallèlement à ſon diametre conjugué *Ss*, eſt tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette ſeule ligne qui puiſſe toucher l'Ellipſe en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné ſur une Ellipſe, on ne peut mener qu'une ſeule tangente.

COROLLAIRE III.

57. DE-LA il eſt évident, ſelon la définition 11e, que ſi l'on mene par un point quelconque *M* d'une Ellipſe, une ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa* ; & qu'ayant pris *CT* du côté du point *P*, troiſieme proportionnelle à *CP*, *CA*, on tire la droite *MT* ; cette ligne *MT* ſera tangente en *M*. Et réciproquement, que ſi la ligne *MT* eſt tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*, les parties *CP*, *CA*, *CT* de cet axe, ſeront en proportion géométrique continue.

COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propoſitions, que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques ; on verra que ces Propoſitions ſeront encore vraies, puiſqu'elles ſe démontreront de la même maniere qu'auparavant : comme il eſt évident par l'inſpection de la figure 23, où les triangles

ſemblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il ſuit 1°. Que le Corollaire précédent doit encore avoir lieu, lorſque la ligne *Aa*, au lieu d'être un axe, eſt un diametre quelconque. 2°. Que les diametres conjugués *Mm*, *Ss*, peuvent être les deux axes dans cette ſuppoſition ; & qu'ainſi on peut regarder les deux axes comme deux diametres conjugués qui ſont entr'eux des angles droits.

PROPOSITION VII.

Théorême.

FIG. 24. 59. SI *par un point quelconque d'une Ellipſe qui a pour centre le point* C, *l'on tire une ordonnée* MP *à l'un des axes* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui paſſe par le point* M : *je dis que* CP *ſera toujours à* PG *en raiſon donné de l'axe* Aa *à ſon parametre.*

Car nommant le demi-axe *CA* ou *Ca*, *t* ; & les indéterminées *CP*, *x* ; *PM*, *y* ; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; & partant $PT = \frac{tt-xx}{x}$. Or les triangles rectangles ſemblables *TPM*, *MPG*, donnent $TP\left(\frac{tt-xx}{x}\right).PM\,(y) :: PM\,(y)\,PG = \frac{xyy}{tt-xx}$. D'où l'on tire cette proportion $CP\,(x).PG\left(\frac{xyy}{tt-xx}\right) :: AP \times Pa\,(tt-xx).\overrightarrow{PM}\,(yy)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit *xyy*. Mais le rectangle $AP \times Pa$, eſt * au quarré $\overrightarrow{PM}$, comme l'axe *Aa* eſt à ſon parametre. Donc, &c.

* *Art.* 57.

* *Art.* 41.

PROPOSITION VIII.

Théorême.

FIG. 25. 60. SI *l'on mene par un point quelconque* M *d'une Ellipſe, une tangente* TMS, *& aux deux foyers* F, f, *les*

droites MF, Mf; *je dis que les angles* FMT, fMS, *faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente* TMS, *ſont égaux entr'eux.*

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, ſur cette tangente; le premier axe Aa qui la rencontre en T, & l'ordonnée MP à cet axe, & nommé les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura MF * $\left(t-\frac{mx}{t}\right)$. $Mf\left(t+\frac{mx}{t}\right)$ :: TF, ou CT * $\left(\frac{tt}{x}\right)-CF(m)$. Tf ou $CT\left(\frac{tt}{x}\right)+Cf(m)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles ſemblables TFD, Tfd, donnent $TF.Tf$ :: $FD.fd$. L'hypothénuſe MF du triangle rectangle MDF, ſera donc à l'hypothénuſe Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF eſt au côté df; & par conſéquent ces deux triangles ſeront ſemblables. Les angles FMD, fMd, ou FMT, fMS, qui ſont oppoſés aux côtés homologues DF, df, ſeront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 38.
* *Art.* 57.

COROLLAIRE.

61. DE-LA il eſt évident que la tangente TMS étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laiſſe l'Ellipſe toute entiere du côté de ſes deux foyers F, f. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de l'Ellipſe que tombe le point M, il s'enſuit qu'elle ſera concave dans toute ſon étendue autour de ſes deux foyers, & par conſéquent auſſi autour de ſon centre.

PROPOSITION IX.

Théorême.

62. SI *l'on mene par l'une des extrémités* A *d'un diametre* Aa *une parallèle* DAE *à ſon conjugué* Bb, *laquelle rencontre deux autres diametres conjugués quelconques* FIG. 26.

Mm, Ss, *aux points* D, E; *je dis que le rectangle de* DA *par* AE, *eſt égal au quarré de la moitié* CB *du diametre* Bb.

Il faut prouver que $DA \times AE = \overline{CB}^2$.

Ayant mené par les extrêmités M, S, des diamètres conjugués Mm, Ss, les ordonnées MP, SK, au diametre Aa, on nommera les données CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; & on aura * $\overline{CK}^2 = AP \times Pa = tt - xx$; & par conſéquent $AK \times Ka$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2 = xx$. Or * $\overline{BC}^2 (cc). \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{MP}^2 (yy). AP \times Pa$ ou $\overline{CK}^2 = \frac{ttyy}{cc}$. Et $\overline{CA}^2 (tt). \overline{CB}^2 (cc) :: AK \times Ka (xx). \overline{KS}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire $CK = \frac{ty}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles ſemblables CPM, CAD, & CKS, CAE, donnent $CP (x). PM (y) :: CA (t). AD = \frac{ty}{x}$. Et $CK\left(\frac{ty}{c}\right). KS\left(\frac{cx}{t}\right) :: CA (t). AE = \frac{ccx}{ty}$. Donc $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$.

Ce qu'il falloit démontrer.

* *Art.* 52.

* *Art.* 54.

PROPOSITION X.

Problême.

FIG. 27. 63. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés, avec une ligne droite* MCm *qui paſſe par le centre* C; *marquer ſur cette ligne les points* M, m, *où elle rencontre l'Ellipſe.*

Ayant mené par l'une des extrêmités A du diametre Aa, une parallèle indefinie AD, à ſon conjugué Bb, laquelle rencontre la ligne CM donnée de poſition au point D; on tirera par le point A perpendiculairement ſur AD, la ligne AO égale à CB, & par les points O, D, la ligne OD. On décrira du rayon OA un cercle qui coupera la ligne OD en deux points N, n, par où l'on tirera des parallèles NM, nm, à la ligne OC qui joint

les centres de l'Ellipſe & du cercle. Je dis que les points M, m, où elles rencontrent la ligne CD, ſeront à l'Ellipſe, & détermineront par conſéquent les extrêmités du diametre MCm donné de poſition:

Car menant les parallèles MP, NQ, à AD, qui rencontrent les lignes CA, OA, aux points P, Q; les triangles ſemblables CDO, MDN, & CDA, CMP, & ODA, ONQ, donneront $CA.\ CP :: CD.\ CM :: OD.\ ON :: OA.\ OQ$. c'eſt-à-dire, $CA.\ CP :: OA.\ OQ$. Et partant ſi l'on mene la droite PQ, elle ſera parallèle à OC; & par conſéquent auſſi à MN ſuppoſée parallèle à OC. Ainſi les parallèles MP, NQ, ſeront égales entr'elles. Cela poſé, ſi l'on nomme les données CA, t; CB ou AO ou ON, c; & les indéterminées CP, x; PM ou NQ, y; on aura $CA\ (t).\ CP\ (x) :: OA\ (c).\ OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle OQN rectangle en Q, le quarré $\overline{NQ}$ ou $\overline{MP}\ (yy) = \overline{ON}\ (cc) - \overline{OQ}\ \left(\frac{ccxx}{tt}\right)$. La ligne MP ſera donc * une ordonnée au diametre Aa, & par conſéquent le point M appartiendra à l'Ellipſe qui a pour diametres conjugués les droites Aa, Bb. Mais à cauſe des parallèles NM, OC, nm, la ligne Mm eſt diviſée en deux également par le centre C; puiſque par la propriété du cercle, Nn l'eſt au point O. Donc le point m appartiendra * auſſi à la même Ellipſe.

* *Art.* 41 & 55.

* *Art.* 50.

Si les diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, les parallèles CO, PQ, ſe confondroient alors avec les lignes CA, AO, qui n'en feroient qu'une ſeule; ce qui rendroit la conſtruction & la démonſtration un peu plus faciles.

PROPOSITION XI.

Problême.

64. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés; en trouver les deux axes* Mm, Ss: *& démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.* FIG. 27.

Digitized by Google

Ayant mené par l'une des extrêmités A du diametre Aa, une parallèle DE à ſon conjugué Bb, on tirera AO perpendiculaire à DE & égale à CB. Ayant joint OC, on menera par ſon point de milieu F la ligne FG qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point G la ligne DE, ſur laquelle on prendra de part & d'autre du point G les parties GD, GE, égales chacune à GO ou GC. Tirant enfin les droites CD, CE; je dis que les deux axes Mm, Ss, ſont ſitués ſur ces droites.

* *Art.* 58. Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diametres conjugués, qui ſont entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne DE en des points D, E, tels que le cercle décrit de ce diametre paſſera par les deux points C, O; puiſque le rectangle $DA \times AE$ étant * *Art.* 62. égal * au quarré de AO, l'angle DOE ſera droit, auſſi bien que l'angle DCE. Or il eſt évident que c'eſt préciſément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette conſtruction; puiſque les lignes GO, GC, GE, GD, étant toutes égales entr'elles, ſont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir ſur la ligne DE que deux points D, E, qui ſatisfaſſent en même temps à ces deux conditions; ſçavoir, que l'angle DCE & l'angle DOE ſoient chacun droit; il s'enſuit que les diametres conjugués Mm, Ss, qui ſont entr'eux un angle droit, ſeront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites OD, OE; & par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA; mener * *Art.* 63. les parallèles NM, RS. Car il eſt évident * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, appartiendront à l'Ellipſe qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb; & qu'ainſi ils ſeront les extrêmités de ſes axes.

COROLLAIRE.

65. SI l'on propoſoit de trouver deux diametres conjugués Mm, Ss, qui fiſſent entr'eux un angle MCS égal à un angle donné ; deux autres diametres conjugués Aa, Bb, étant donnés. Il eſt viſible que la queſtion ſe réduiroit à trouver ſur la ligne DE donnée de poſition : deux points D, E, tels que menant aux deux points O, C, donnés hors cette ligne, les droites DO, OE, CD, CE, l'angle DOE fut droit, & l'angle DCE égal à l'angle donné. Mais comme la ſolution de ce Problême eſt aſſez difficile, on l'a renvoyée dans le 10e Livre, & on a ſuivi ici une autre voye, qui eſt plus ſimple ; c'eſt de trouver d'abord les deux axes, & de s'en ſervir enſuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enſeigner dans la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XII.

Problême.

66. LES *deux axes* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés ; trouver deux diametres conjugués* Mm, Ss, *qui fuſſent entr'eux l'angle* MCS *égal à un angle donné.* Fig. 28 & 29.

Je ſuppoſe que les diametres Mm, Ss, ſoient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points D, E, la ligne droite indéfinie DE menée par l'extrémité A du petit axe Aa parallèlement au grand Bb. Et ayant tiré du centre C de l'Ellipſe, la ligne CF, qui faſſe avec DE au point F l'angle CFE égal à l'angle donné MCS, je nomme les données CA, t ; CB, c ; AF, a ; & l'inconnue AE, z ; ce qui donne $AD = * \frac{cc}{z}$, $CE = \sqrt{tt + zz}$ à cauſe du triangle rectangle CAE. Cela poſé : * *Art.* 62.

Les triangles FEC, CED, ſeront ſemblables ; puiſque l'angle au point E eſt commun, & que l'angle CFE a

été fait égal à l'angle MCS : c'eſt pourquoi $FE(z-a)$. $EC(\sqrt{tt+zz}) :: EC(\sqrt{tt+zz}).ED\left(z+\frac{cc}{z}\right)$. D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zz-az+cc-\frac{acc}{z}=tt+zz$; & effaçant de part & d'autre zz, multipliant enſuite par z, & diviſant par a, il vient $zz-\frac{cc}{a}z+\frac{tt}{a}z+cc=o$. Et en faiſant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc-tt}{a}=2b$, on changera l'égalité précédente en celle-ci $zz-2bz+cc=o$, ou $zz-2bz+bb=bb-cc$; ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $z-b$ ou $b-z=\sqrt{bb-cc}$, & par conſéquent l'inconnue $AE(z)=b\pm\sqrt{bb-cc}$. Voici maintenant la conſtruction que cette derniere égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe Aa juſqu'au point O, en ſorte que AO ſoit égale à la moitié CB du grand ; ſoit tirée CF, qui faſſe avec DE menée par le point A parallèlement à Bb, l'angle CFE égal à l'angle donné. Ayant joint OF, ſoient tirées les droites OH, CG, perpendiculaires ſur OF, CF, qui rencontrent DE aux points H, G (on n'a point marqué dans les figures 28 & 29, les points H, G, ſur la ligne DE : parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il eſt facile de les y imaginer). Soit décrit du centre O, & du rayon OK, égal à la moitié de GH, partie de AD prolongée, compriſe entre G & H, un arc de cercle qui coupe DE aux points K, K; & ayant pris ſur DE les parties KD, KE, égales chacune à KO, ſoient tirées par le centre C de l'Ellipſe, les droites DC, EC. Je dis que les diametres cherchés Mm, Ss, ſont ſitués ſur ces lignes.

Car à cauſe des angles droits FAC, FCG, & FAO, FOH; on aura $AG=\frac{tt}{a}$, $AH=\frac{cc}{a}$; & partant $GH=\frac{cc-tt}{a}=2b$. Le rayon OK qui eſt égal à la moitié de HG, ſera donc égal à b ; & à cauſe du triangle rectangle

gle OAK, on aura $AK=\sqrt{bb-cc}$, & AE ou $KE\mp AK=b\mp\sqrt{bb-cc}$ & AD ou $KD+AK=b+\sqrt{bb-cc}$. Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de AE par celle de AD, il vient $AE\times AD=cc=\overline{CB}^2$; & partant * les diametres Mm, Ss, sont conjugués. Mais le rectangle de $AE+AD$ ou $DE(2b)$ par $AE-AF$ ou $EF(b\mp\sqrt{bb-cc}-a)$ est $=2bb\mp 2b\sqrt{bb-cc}-2ab=2bb\mp 2b\sqrt{bb-cc}+tt-cc$ en mettant pour $2ab$ sa valeur $cc-tt$; & à cause du triangle rectangle CAE le quarré $\overline{CE}^2=\overline{AE}^2+\overline{CA}^2=2bb\mp 2b\sqrt{bb-cc}+tt-cc=DE\times EF$: ce qui donne $FE.EC::EC.ED$. Et partant les triangles FEC, CED, seront semblables; puisqu'ils ont l'angle au point E commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle MCS sera donc égal à l'angle donné CFE. C'est ce qui restoit à démontrer. * *Art.* 62.

Maintenant pour avoir la grandeur CM, CS, des deux demi-diametres cherchés; il n'y a qu'à tirer les lignes OD, OE, & mener par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA, les parallèles NM, RS, à OC. Car il est visible * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, seront à l'Ellipse, & détermineront par conséquent les extrêmités de ces diametres. * *Art.* 63.

COROLLAIRE I.

67. IL suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problême soit possible, il faut que $OK\left(\frac{cc-tt}{2a}\right)$ surpasse ou soit égale à AO (c); car autrement le cercle décrit du rayon OK, ne rencontreroit la ligne DE en aucun point, ce qui est néanmoins nécessaire pour la construction.

2°. Que lorsque OK surpasse OA, on trouve toujours par le moyen des deux points K, K, deux différens diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont également: mais qu'alors le diametre Ss de la figure 29 est égal au diametre Mm de la figure 28, & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa; parce que AE de la figure

29, eſt égal à AD de la figure 28. Et de même que le diametre Mm de la figure 29 eſt égal au diametre Ss de la figure 28, & ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe Aa; parce que AD de la figure 29 eſt égal à AE de la figure 28. C'eſt-à-dire que les deux différens diametres conjugués Mm, Ss, qui ſatisfont également au Problême, ſont ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe Aa, & que dans ces deux différentes poſitions leurs grandeurs demeurent la même.

3°. Que lorſque $OK = OA$, les deux points d'interFIG. 30. ſection K, K, ſe réuniſſent au point touchant A; & qu'ainſi il n'y a alors qu'à prendre les parties AE, AD, égales chacune à la moitié CB du grand axe: d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une ſolution, & que les deux diametres conjugués Mm, Ss, qui ſatisfont, ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

FIG. 28, 29 & 30. 68. IL eſt clair auſſi que plus AF (a) eſt grande, plus l'angle obtus donné CFE l'eſt auſſi, & plus au contraire la ligne $OK\left(\frac{cc-ll}{2a}\right)$ diminue: de ſorte que AF étant la plus grande qu'il eſt poſſible, l'angle obtus CFE, ſera auſſi le plus grand; & au contraire la ligne OK, ſera la moindre, c'eſt-à-dire égale à AO. Or ſi l'on mene alors FIG. 30. les droites Ba, ab; les triangles rectangles aCB, CAD, aCb, CAE, ſeront tous égaux entr'eux; puiſque les lignes, AE, AD, ſont égales chacune à la moitié CB ou Cb de l'axe Bb, & que CA eſt égal à Ca. L'angle ACM, ſera donc égal à l'angle CaB, & l'angle ACS à l'angle Cab; & partant l'angle donné MCS ou CFE, ſera auſſi égal à l'angle Bab. D'où l'on voit:

FIG. 28, 29 & 30. 1°. Que ſi l'on mene de l'une des extrêmités a du petit axe Aa aux extrêmités B, b, du grand, les lignes aB, ab; l'angle obtus donné CFE, doit être égal ou moindre que * *Art.* 67. l'angle Bab, afin que * le Problême ſoit poſſible.

2°. Que lorſqu'il lui eſt égal, comme dans la figure 30,

il n'y a que deux diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28 & 29, il y a toujours deux différens diametres conjugués qui satisfont également; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux; & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux différentes positions.

PROPOSITION XIII.

Problême.

69. DEUX *diametres conjugués* A a, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; la décrire par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite selon l'article 36. * *Art.* 64.

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extrêmités A de l'un des diametres donnés Aa, une perpendiculaire AH sur l'autre Bb, on prendra sur cette ligne la partie AQ de part ou d'autre du point A égale à CB. Et ayant tiré la ligne CQ, on fera glisser la ligne GF égale à HQ par ses extrêmités le long des lignes Bb, CQ (prolongées de part & d'autre du centre C autant qu'il sera nécessaire) jusqu'à ce qu'après avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend GM égal à AQ, le point M décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise. FIG. 31 & 32.

Car menant GP parallèle à QA, qui rencontre en P le diametre Aa, & en O le diametre Bb; les triangles semblables CHQ, COG, & CAQ, CPG, donneront $CQ.CG :: AQ$ ou $GM.GP :: HQ$ ou $GF.GO$. Et par conséquent la ligne PM sera parallèle au diametre Bb. Cela posé:

Si l'on nomme les données CA, t; AQ ou CB ou Cb, c; & les inconnues CP, x; PM, y; on aura $CA\,(t).\,CP\,(x)::AQ\,(c).\,GP=\frac{cx}{t}$. Et le triangle rectangle GPM donnera $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GP}$, c'eſt-à-dire en termes analytiques $yy=cc-\frac{ccxx}{tt}$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée au diametre Aa dans l'Ellipſe qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb. Donc, &c.

* *Art.* 41 & 55.

Si les deux diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, il eſt clair que les lignes AQ, CQ, tomberoient ſur le diametre Aa qui ſeroit l'un des axes, & que le point H tomberoit ſur le centre C. D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors GF égale à CQ, ſomme ou différence des deux demi-axes CA, CB; & la faire gliſſer par ſes extrêmités le long des axes Aa, Bb, prolongés s'il eſt néceſſaire.

FIG. 33.

Comme les lignes Aa, Bb, s'entrecoupent à angles droits au point C; il eſt clair qu'en quelque ſituation que ſe trouve la droite GF pendant qu'elle gliſſe le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diametre, paſſeroit toujours par le point C; & qu'ainſi la ligne CD qui paſſe par le point D milieu de FG, ſera toujours egale à DF, puiſque les lignes CD, DF, DG, ſeront toujours des rayons de ce cercle. De-là naît la deſcription ſuivante.

Soient deux lignes droites CD, DF, égales chacune à la moitié de CQ, ſomme ou différence des deux demi-axes CB, CA; attachées l'une a l'autre par leur extrêmité commune D, en ſorte qu'elles ſe puiſſent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de ſa tête. Soit attachée l'extrêmité C de la droite CD dans le centre de l'Ellipſe; & ſoit entendue l'extrêmité F de l'autre droite FD, ſe mouvoir le long de l'axe Bb, en entraînant avec elle la ligne DC mobile autour du point fixe C. Il eſt clair que ſi l'on prend ſur FD (prolongée, s'il eſt néceſſaire) la partie FM égale à CA, le

point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipſe qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problême.

70. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés ; la décrire par pluſieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extrêmités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une parallèle indéfinie *DAD* à ſon conjugué *Bb*, on tirera *AO* perpendiculaire à *AD*, & égale à la moitié *CB* du diametre *Bb* ; on joindra *OC* ; & on décrira un cercle du centre *O*, & du rayon *OA*. Cela fait on menera librement de part & d'autre de *CA*, autant de lignes *CD*, *CD*, &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points *D*, *D*, &c. où elles rencontrent la ligne *DAD*, au centre *O*, les lignes *DO*, *DO*, &c. qui coupent la circonférence du cercle aux points *N*, *N*, &c. on menera des droites *NM*, *NM*, &c. parallèles à *OC*, leſquelles rencontrent aux points *M*, *M*, &c. les droites correſpondantes *CD*, *CD*, &c. ſur leſquelles on marquera de l'autre côté du centre *C* des points *m*, *m*, &c. qui en ſoient également éloignés. Il eſt évident * que la ligne courbe qui paſſera par tous les points *M*, *M*, &c ; *m*, *m*, &c. ainſi trouvés, aura pour diametres conjugués les droites *Aa*, *Bb*. FIG. 34. * *Art.* 63.

SECONDE MANIERE.

Ayant pris ſur l'un des demi-diametres *CB*, de petites parties *CE*, *EE*, &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diametre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires *ED*, *ED*, &c. qui rencontrent la circonférence circulaire décrite du centre *C* & du rayon *CB*, aux points *D*, *D*, &c. Ayant joint *AB*, on tirera par celui des points *E*, qui eſt le plus proche du centre *C*, la ligne *EP* parallèle à *AB*, FIG. 35.

Digitized by Google

qui rencontre CA au point P. On prendra ſur le diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de parties PP, PP, &c. égales à CP, qu'il en pourra contenir; & on menera par tous les points P, P, &c. des parallèles MPM, MPM, &c. au diametre Bb, ſur chacune deſquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à ſa correſpondante ED. Je dis que la ligne courbe qui paſſe par tous ces points M, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

Car nommant les données CA, t; CB ou CD, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; on aura à cauſe des triangles ſemblables CAB, CPE, cette proportion $CA\ (t).\ CB\ (c) ::\ CP\ (x).\ CE = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle CED rectangle en E, le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2\ (yy) =$ $\overline{CD}^2\ (cc) - \overline{CE}^2\ \left(\frac{ccxx}{tt}\right)$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée au diametre Aa. Et comme cette démonſtration convient à toutes les lignes PM; puiſque chaque CP eſt toujours à ſa correſpondante CE, en raiſon de CA à CB: il s'enſuit que la Courbe qui paſſe par tous les points M trouvés comme ci-deſſus, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

* *Art.* 41 & 55.

LIVRE TROISIEME.

DE L'HYPERBOLE.

DÉFINITIONS.

I.

AYANT attaché ſur un plan en un point *f* l'une des extrêmités d'une longue regle *fMO*, en ſorte qu'elle puiſſe tourner librement autour de ce point fixe *f*, comme centre; on attachera à ſon autre extrêmité *O*, le bout d'un fil *OMF*, dont la longueur doit être moindre que celle de la regle, & duquel l'autre bout ſera attaché en un autre point *F*, pris auſſi ſur ce plan. Maintenant, ſi l'on fait tourner la regle *fMO* autour du point fixe *f*, & qu'en même temps l'on ſe ſerve d'un ſtile *M* pour tenir le fil *OMF*, toujours également tendu, & ſa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le bord de la regle: la ligne courbe *AX* décrite dans ce mouvement, eſt une portion d'*Hyperbole*. FIG. 36.

Si l'on renverſe la regle de l'autre côté du point *F*, on décrira de la même ſorte l'autre portion *AZ* de la même Hyperbole.

Mais, ſi ſans changer la longueur de la regle, ni celle du fil, on attache l'extrêmité de la regle en *F*, & celle du fil en *f*, on décrira en la même ſorte une autre ligne courbe *xaz* oppoſée à la premiere *XAZ*, qui eſt encore appellée *Hyperbole*, & les deux enſemble ſont nommées *Hyperboles oppoſées*.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par les Hyperboles oppoſées, eſt appellée le *premier Axe*.

4.

Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premier axe *Aa*, eſt nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mene par le centre *C* une perpendiculaire indéfinie *Bb* au premier axe *Aa*; & que du point *A*, comme centre, & de l'intervalle *CF*, on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points *B*, *b*: la partie *Bb* de cette perpendiculaire, eſt appellée le *ſecond Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, ſont appellés enſemble *Conjugués*; de ſorte que le premier Axe *Aa*, eſt dit *Conjugué* au ſecond *Bb*; & réciproquement le ſecond *Bb*, *Conjugué* au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* des Hyperboles oppoſées parallèlement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainſi *MP* eſt *Ordonnée* au premier axe *Aa*, & *MK* au ſecond *Bb*.

8.

La troiſieme proportionnelle aux deux axes, eſt appellée *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion. Ainſi ſi l'on fait comme le premier Axe *Aa*, eſt au ſecond axe *Bb*, de même le ſecond axe *Bb*, à une troiſieme proportionnelle *p*; cette ligne *p* ſera le Parametre du premier axe *Aa*.

9.

Toutes les lignes qui paſſent par le centre *C*, ſont appellées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles oppoſées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongées à l'infini, *ſeconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un ſeul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

REMARQUE.

71. ON a dit dans la premiere définition que la longueur du fil FMO doit être moindre ou plus grande que celle de la regle fMO; dont la raiſon eſt que s'il étoit égal à cette regle, le ſtile M décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points M ſeroient également diſtants des deux points F, f; puiſque retranchant du fil & de la regle, la partie commune MO, les reſtes MF, Mf, ſeroient toujours égaux entr'eux. D'où il eſt viſible que cette ligne ne ſeroit autre qu'une ligne droite indéfinie Bb, menée perpendiculairement à la droite Ff par ſon point du milieu C. FIG. 37.

COROLLAIRE I.

72. IL ſuit de la définition premiere, que ſi l'on mene d'un point quelconque M, de l'une des Hyperboles oppoſées, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf; leur différence ſera toujours la même. Car elle ſera toujours égale à la différence qui ſe trouve entre la longueur de la regle & celle du fil. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

73. LORSQUE le point M tombe en A, il eſt viſible que MF devient AF, & que Mf devient Af; & de même, lorſque le point M tombe en a, en décrivant l'Hyperbole oppoſée xaz; il eſt encore viſible que MF devient aF, & que Mf devient af. Donc puiſque la différence de ces deux droites eſt par-tout la même, on aura $Af-AF$ ou $Ff-2AF=aF-af$ ou $Ff-2af$; & partant $AF=af$. D'où il ſuit :

1°. Que la diſtance Ff des foyers, eſt diviſée en deux parties égales par le centre C; puiſque $CA+AF$ ou $CF=Ca+af$ ou Cf.

2°. Que la différence des deux droites MF, Mf, eſt toujours égale au premier axe Aa; puiſque dans l'Hyperbole XAZ, on a toujours $Mf-MF=Af-AF$ ou

$Af - af$; & que dans ſon oppoſée xaz, on a auſſi toujours $MF - Mf = aF - af$ ou $aF - AF$.

COROLLAIRE III.

74. IL ſuit de la définition cinquieme :

1°. Que le ſecond axe Bb, eſt diviſé en deux parties égales par le centre C ; car les triangles rectangles ACB, ACb, ſeront égaux, puiſqu'ils ont des hypothénuſes égales AB, Ab, & le côté AC commun.

2° Que ſi l'on prend ſur le ſecond axe Bb, la partie CE égale à la moitié CA du premier, & qu'on tire l'hypothénuſe AE : le ſecond axe Bb ſera plus grand, égal, ou moindre que le premier Aa ; ſelon que la droite CF, eſt plus grande, égale, ou moindre que l'hypothénuſe AE ; parce que l'hypothénuſe Ab, priſe égale à CF, ſe trouvera auſſi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothénuſe AE.

3°. Que ſi l'on prend ſur le premier axe Aa de part & d'autre du centre C, les parties CF, cf, égales chacune à l'hypothénuſe AB du triangle rectangle CAB, formé par les deux demi-axes CA, CB : les points F, f, ſeront les deux foyers.

COROLLAIRE IV.

75. LES mêmes choſes étant poſées, ſi l'on nomme CF ou AB, m ; CA, ou Ca, t ; le triangle rectangle ACB, donnera $\overline{BC} = mm - tt$. Or $AF = m - t$, & $Fa = m + t$; & partant $AF \times Fa = mm - tt$. D'où il eſt évident que le quarré de la moitié CB du ſecond axe Bb, eſt égal au rectangle de AF par Fa parties du premier axe Aa, priſes entre l'un des foyers F, & ſes deux extrêmités A, a.

COROLLAIRE V.

76. IL ſera maintenant facile de décrire les Hyperboles oppoſées dont les deux axes Aa, Bb, ſont donnés, & dont l'on ſçait que l'axe Aa doit être le premier. Car

ayant trouvé * ſur le premier axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans le point F, le bout d'un fil FMO, duquel l'autre bout O, ſera lié à l'extrêmité d'une longue regle OMf, mobile ſur ſon autre extrêmité f autour du foyer f, & dont la longueur OMf doit * être moindre ou plus grande que la longueur du fil OMF, de la ligne Aa. Ayant enſuite décrit par le moyen de cette regle & de ce fil, deux Hyperboles oppoſées XAZ, xaz, comme l'on a enſeigné dans la définition premiere, il eſt évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne Aa, & pour ſecond, la ligne Bb. Et c'eſt ce qu'on demandoit.

* *Art.* 74.

* *Art.* 71.

Plus la regle OMf ſera longue, & plus les portions des Hyperboles oppoſées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, ſeront grandes; de ſorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

PROPOSITION I.

Théorême.

77. SI *l'on mene l'ordonnée* MP *au premier axe* Aa, *& qu'on prenne ſur cet axe prolongé la partie* AD *égale à* MF, *du côté du foyer* F, *lorſque le point* M *tombe ſur l'Hyperbole* XAZ, *& du côté du foyer* f *lorſqu'il tombe ſur ſon oppoſée* xaz; *je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca, t; CF, ou Cf, m; & de plus les indéterminées CP, x; PM, y; & l'inconnue CD, z; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (ſelon que le point P tombe au-deſſous ou au-deſſus du foyer F), $Pf = x + m$: & dans le ſecond cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ ſelon que le point P tombe au-deſſus ou au-deſſous du foyer f.

Cela poſé, le triangle rectangle MPF donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; ſçavoir, — dans le premier

cas, + dans le ſecond; & l'autre triangle rectangle MPf donnera $\zeta\zeta \mp 2t\zeta + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; ſçavoir, + dans le premier, & — dans le ſecond.

Maintenant, ſi l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la ſeconde; & au contraire dans le ſecond cas, chaque membre de la ſeconde de ceux de la premiere, il vient $4t\zeta = 4mx$; d'où l'on tire $CD(\zeta) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA(t).\ CF(m) :: CP(x).\ CD(\zeta)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

78. IL eſt évident que ſi l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toujours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorſque le point M tombe ſur l'Hyperbole XAZ, qui a pour foyer le point F: & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorſque le point M tombe ſur ſon oppoſée xaz, qui a pour foyer le point f.

PROPOSITION II.

Théorême.

79. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* PM, *au premier axe* Aa, *eſt au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe prolongé, comme le quarré de ſon conjugué* Bb, *eſt au quarré du premier axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}.\ AP \times Pa :: \overline{Bb}.\ \overline{Aa}$.

Les mêmes choſes étant poſées que dans la Propoſition précédente, ſi l'on met dans l'équation $\zeta\zeta \mp 2t\zeta + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de ζ, ſa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toujours celle-ci $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}\ (yy).\ AP \times Pa\ (xx - tt) ::$

* *Art.* 77.

$\overline{BC}$ * $(mm—tt)$. $\overline{CA}$ (tt) :: $\overline{Bb}$. $\overline{Aa}$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 75.

COROLLAIRE I.

80. SI l'on mene une ordonnée MK au ſecond axe Bb, lequel j'appelle $2c$; il eſt clair que $MK = CP$ (x), & que $CK = PM$ (y). Or $\overline{PM}$ (yy). $AP \times Pa$ $(xx—tt)$ :: $\overline{Bb}$ $(4cc)$. $\overline{Aa}$ $(4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt + 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}$ (xx). $\overline{CK} + \overline{CB}$. $(yy + cc)$ :: $\overline{Aa}$ $(4tt)$. $\overline{Bb}$ $(4cc)$.

C'eſt-à-dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK au ſecond axe Bb, eſt au quarré de CK, joint au quarré de CB moitié du ſecond axe Bb, comme le quarré de ſon conjugué Aa, eſt au quarré de ce ſecond axe Bb.

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. SI l'on nomme le premier ou ſecond axe Aa, $2t$; ſon conjugué Bb, $2c$; ſon parametre p; chacune de ſes ordonnées PM, y; & chacune de ſes parties CP, priſes entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura toujours * $\overline{PM}$ (yy). $\overline{CP} \mp \overline{CA}$ $(xx \mp tt)$ :: $\overline{Bb}$ $(4cc)$. $\overline{Aa}$ $(4tt)$ :: p. Aa $(2t)$. puiſque ſelon la définition du parametre Aa $(2t)$. Bb $(2c)$ :: Bb $(2c)$. $p = \frac{4cc}{2t}$. où l'on doit obſerver que c'eſt le ſigne — lorſque l'axe Aa eſt le premier, & qu'ainſi on peut ſubſtituer alors à la place de $\overline{CP} — \overline{CA}$, le rectangle $AP \times Pa$ qui lui eſt égal; & au contraire que c'eſt le ſigne + lorſque l'axe Aa eſt le ſecond. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiere proportion yy. $xx \mp tt$ :: $4cc$. $4tt$. enſuite de l'autre yy. $xx \mp tt$ :: p. $2t$. l'on tire $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, & $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$. Or comme cette propriété convient également à tous les points des Hyperboles oppoſées, & qu'elle en FIG. 38 & 39.

Digitized by Google

détermine la position par rapport aux axes ; il s'ensuit que l'équation $yy = \frac{cc\,xx}{tt} \mp cc$, ou $yy = \frac{p\,xx}{2\,t} \mp \frac{1}{2}\,p\,t$, en exprime parfaitement la nature par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

82. SI l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe Aa, il est clair que $\overline{MP}^2 . \overline{QN}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Car $\overline{PM}^2 . \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{QN}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Donc, &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2$, les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, qui leur sont égaux ; ce qu'il faut toujours observer dans la suite.

COROLLAIRE IV.

83. SI l'on mene par un point quelconque P de l'un ou de l'autre axe Aa (prolongé lorsque c'est le premier) une parallèle MPM à son conjugué Bb ; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, soient à une Hyperbole ou aux Hyperboles opposées, il faut * que les quarrés de PM (y) prises de part & d'autre de l'axe Aa, soient égaux chacun à la même quantité $\frac{cc\,xx}{tt} \mp cc$.

* *Art.* 81.

COROLLAIRE V.

Fig. 38 & 39. 84. IL suit de ce que $yy = \frac{cc\,xx}{tt} \mp cc$, que plus CP (x) prise de part ou d'autre du centre C, devient grande, plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa, augmente, & cela à l'infini ; & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi PM (y) diminue ; de sorte que (*fig.* 38.) CP (x) étant égale à CA ou Ca (t) lorsque l'axe Aa, est le premier,

PM (y) devient alors nulle ou zéro ; & que (*fig.* 39.) CP (x) étant nulle ou zéro, lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, chaque PM (y) qui devient alors CB ou Cb (c), eſt la moindre de toutes les ordonnées PM (y) priſes de part & d'autre du centre. D'où il eſt clair :

1°. Que ſi l'on mene (*fig.* 39.) par les extrêmités B, b, du premier axe Bb, des parallèles au ſecond Aa ; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles oppoſées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extrêmités du premier : avec cette différence néanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles oppoſées en un point, & qu'étant prolongé il paſſe au dedans ; au lieu que le ſecond tombe tout entier entre les Hyperboles oppoſées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

COROLLAIRE VI.

85. IL ſuit encore de ce que $yy = \frac{ccxx}{ll} \mp cc$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C, les ordonnées PM, PM, ſeront égales. D'où il eſt clair que ſi une ligne droite MM, terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, eſt coupée en deux également par un axe Bb en un point K autre que le centre, elle ſera parallèle à ſon conjugué Aa. Car menant des parallèles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP, ſera coupée par le milieu en C, puiſque MM l'eſt en K, & partant les ordonnées PM, PM, ſeront égales. La droite MM ſera donc parallèle à l'axe Aa.

COROLLAIRE VII.

86. SI l'on conçoit que le plan ſur lequel les Hyperboles oppoſées ſont tracées, ſoit plié le long de l'axe Aa, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent, il eſt clair (*fig.* 39.) lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, que les

deux Hyperboles oppoſées tomberont exactement l'une ſur l'autre ; ſçavoir, les points B, M, &c. ſur les points b, M, &c. puiſque * toutes les perpendiculaires Bb, MM à cet axe, ſont coupées par le milieu aux points C, P, &c.

* *Art.* 83.

Par la même raiſon (*fig.* 38.) lorſque l'axe Aa eſt le premier, les portions des Hyperboles oppoſées qui ſont de part & d'autre de cet axe, tomberont exactement l'une ſur l'autre.

AVERTISSEMENT.

On a ſuivi juſqu'ici la même méthode que dans l'Ellipſe, & on auroit pû la continuer juſqu'à la fin ; mais comme il faut néceſſairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moyen prouver les mêmes choſes d'une maniere plus aiſée, on a pris ce dernier parti.

DÉFINITIONS.

II.

FIG. 40.

Si l'on mene du centre C deux droites indéfinies CG, Cg, parallèles aux lignes Ab, AB, menées de l'extrêmité A du premier axe Aa, aux deux extrêmités B, b, du ſecond : ces deux droites ſeront appellées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole MAM ; & ſi on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles ſeront nommées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole oppoſées MaM.

12.

Le quarré de la partie CG, ou Cg, d'une aſymptote, compriſe entre le centre C, & la rencontre de la ligne AB, ou Ab, menée de l'extrêmité A du premier axe, à l'extrêmité B, ou b, du ſecond, eſt appellé la *Puiſſance* de l'Hyperbole MAM, ou de ſon oppoſée MaM.

COROLLAIRE I.

COROLLAIRE I.

87. IL eſt évident que l'angle GCg, fait par les aſymptotes d'une Hyperbole, ou ſon égal BAb, eſt moindre, égal, ou plus grand qu'un droit; ſelon que le ſecond axe Bb eſt moindre, égal, ou plus grand que le premier Aa. Car lorſque le premier axe Aa ſurpaſſe le ſecond Bb, ſa moitié CA, ſurpaſſe la moitié CB du ſecond; & par conſéquent dans le triangle rectangle CAB, l'angle CAB eſt moindre qu'un demi-droit. Les deux angles égaux CAB, CAb, qui font enſemble l'angle BAb, ſeront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas ſe démontrent de la même maniere.

COROLLAIRE II.

88. A CAUSE des triangles ſemblables BAb, BGC, il eſt clair que la ligne AB eſt diviſée par l'aſymptote CG en deux parties égales au point G, & que CG eſt la moitié de Ab; puiſque BC eſt la moitié de Bb. On prouvera de même que Ab eſt diviſée par l'aſymptote Cg en deux parties égales au point g, & que Cg eſt la moitié de AB. Donc toutes les lignes CG, GA, GB, Cg, gA, gb, ſont égales entr'elles; puiſqu'elles ſont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes AB, Ab, que l'on ſçait être égales entr'elles, ſuivant la définition 5e.

COROLLAIRE III.

89. LA puiſſance d'une Hyperbole eſt égale à la quatrieme partie de la ſomme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant CA, t; CB, c; CG, m; on aura * $BA = 2m$, & à cauſe du triangle rectangle ACB, le quarré $\overline{AB}$ $(4mm) = tt + cc$. Et par conſéquent $\overline{CG}$ $(mm) = \frac{tt+cc}{4}$. * *Art.* 88.

PROPOSITION III.

Théorême.

FIG. 40. 90. SI *l'on mene par un point quelconque* M *de l'une ou de l'autre des Hyperboles oppoſées, une ligne droite* Rr *perpendiculaire au premier axe* Aa *qu'elle rencontre en* P, *& terminée par les aſymptotes en* R *&* r; *je dis que le rectangle de* RM *par* Mr, *eſt égal au quarré de* BC, *moitié du ſecond axe* Bb.

Il faut prouver que $RM \times Mr = \overline{BC}$.

Nommant les connues CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles ſemblables ACB, CPr, & ACb, CPR, donnent $CA\,(t).\ CB$ ou $Cb\,(c)::CP\,(x).\ Pr$, ou $PR = \frac{cx}{t}$. Donc RM, ou $PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$; & Mr, ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conſéquent $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy = \overline{BC}\ (cc)$ en mettant pour yy ſa valeur * $\frac{ccxx}{tt} - cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 81.

COROLLAIRE I.

91. IL eſt clair que $\overline{PM}\ \left(\frac{ccxx}{tt} - cc\right)$ eſt toujours moindre que $\overline{PR}$ ou $\overline{Pr}\ \left(\frac{ccxx}{tt}\right)$; & par conſéquent que tous les points des Hyperboles oppoſées, tombent dans les angles faits par leurs aſymptotes; de ſorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE II.

92. SI l'on mene par deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole ou des Hyperboles oppoſées, deux lignes droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les aſymptotes: il eſt évident que les rectangles $RM \times Mr, KN \times Nk$, ſeront toujours égaux entr'eux; puiſqu'ils ſont égaux chacun au quarré de la

moitié BC du ſecond axe Bb. D'où l'on voit que $RM.KN :: Nk.Mr$.

PROPOSITION IV.

Théorême.

93. SI *l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles oppoſées, deux droites* Hh, Ll, *parallèles entr'elles, & terminées par les aſymptotes; je dis que les rectangles* HM×Mh, LN×Nl, *ſeront égaux entr'eux.*

Il faut prouver que HM×Mh=LN×Nl.

Ayant mené les droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe Aa, il eſt clair que les triangles MRH, NKL, & Mrh, Nkl, ſont ſemblables; puiſqu'ils ſont formés par des parallèles. On aura donc $RM.KN :: HM.LN$. Et $Nk.Mr :: Nl.Mh$. Or * $RM.KN ::$ $Nk.Mr$. Donc $HM.LN :: Nl.Mh$. Et par conſéquent $HM \times Mh = LN \times Nl$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* *Art.* 92.

COROLLAIRE I.

94. SI l'on ſuppoſe que la ligne NL parallèle à MH, paſſe par le centre C, c'eſt-à-dire, qu'elle devienne CE: il eſt clair que les deux points L, l, ſe réuniront au centre C; & partant que le rectangle $LN \times Nl$, deviendra le quarré $\overline{EC}$. D'où l'on voit que ſi l'on mene d'un point quelconque E, l'une des Hyperboles oppoſées au centre C, la droite CE, & par un autre point quelconque M de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne MHh, parallèle à CE, & qui rencontre les aſymptotes en H & h; le quarré de CE ſera égal au rectangle de HM par Mh.

COROLLAIRE II.

95. SI l'on mene par un point quelconque N, de l'une des Hyperboles oppoſées, une ligne droite Ll, terminées par les aſymptotes, & qui rencontre l'une ou

l'autre de ces Hyperboles en un autre point n ; les parties LN, ln, de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant LN, a ; Nn, b ; nl, c; on aura $LN \times Nl\,(ab \mp ac) = HM \times Mh = Ln \times nl.\,(bc \mp ac)$, d'où l'on tire $LN\,(a) = ln\,(c)$.

COROLLAIRE III.

96. SI l'on suppose dans le Corollaire précédent que la ligne Nn, terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre C, c'est-à-dire, qu'elle devienne le premier diametre ED : il est évident que les deux points L, l, se réuniront au centre C; & qu'ainsi NL deviendra EC, & nl, CD. D'où l'on voit que tout premier diametre DE, est divisé en deux également par le centre C.

COROLLAIRE IV.

97. SI deux lignes droites Mm, Nn, parallèles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points H, L; je dis que les rectangles $MH \times Hm$, $NL \times Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est nécessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points h, l; les parties MH, mh, & NL, nl, seront égales * entr'elles : & partant, puisque $HM \times Mh = LN \times Nl$, il s'ensuit que $MH \times Hm = NL \times Ln$.

* *Art.* 95.

PROPOSITION V.

Problême.

FIG. 41. 98. SI *l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* MH, NL, *parallèles entr'elles & terminées par un asymptote ; & deux autres droites* Mh, Nl, *aussi parallèles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote ; je dis que*

les rectangles HM × Mh, NL × Nl, *ſont égaux entr'eux.*

Cette Propoſition ſe prouve de la même maniere que la précédente, & il n'y a rien à changer dans la démonſtration.

COROLLAIRE I.

99. SI les droites MH, Mh, & NL, Nl, ſont parallèles aux deux aſymptotes; il eſt clair que les parallélogrammes $MHCh$, $NLCl$, auſſi bien que les triangles CHM, CLN, qui en ſont les moitiés, ſont égaux entr'eux; puiſque les côtés de ces parallélogrammes autour des angles égaux HMh, LNl, ſont réciproquement proportionnels. FIG. 42.

COROLLAIRE II.

100. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précédent, il eſt viſible que $CH \times HM = CL \times LN$; puiſque dans cette ſuppoſition $Mh = CH$, & $Nl = CL$: c'eſt-à-dire, que ſi l'on mene par deux points quelconques M, N, de l'une, ou des Hyperboles oppoſées, deux droites MH, NL, parallèles à l'une des aſymptotes, & terminées par l'autre; les rectangles $CH \times HM$, $CL \times LN$, ſeront toujours égaux entr'eux; & qu'ainſi $CH.CL :: LN.MH$.

COROLLAIRE III.

101. PUISQUE l'extrêmité A du premier axe, eſt un des points de l'Hyperbole, & que la ligne AB, qui coupe en G, l'aſymptote CG, eſt parallèle à l'autre aſymptote Cg; il s'enſuit * que le rectangle $CH \times HM$ ſera toujours égal au même rectangle $CG \times GA$, ou * au quarré $\overline{CG}$, c'eſt-à-dire, ſelon la définition 12e, à la puiſſance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée CG, m; & les indéterminées CH, x; HM, y; on aura toujours $CH \times HM\ (xy) = \overline{CG}\ (mm)$. Or comme cette propriété convient également à tous les points des Hyperboles oppoſées, & qu'elle en détermine la poſition par

* *Art.* 100.
* *Art.* 88.

rapport à ſes aſymptotes ; il s'enſuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ſes aſymptotes.

COROLLAIRE IV.

102. IL ſuit de ce que $HM\,(y) = \frac{mm}{x}$, que plus CH (x) augmente, plus au contraire $HM\,(y)$ diminue ; de ſorte que $CH\,(x)$ étant infiniment grande, $HM\,(y)$ ſera alors infiniment petite, c'eſt-à-dire, nulle ou zéro. D'où l'on voit que l'Hyperbole AM, & ſon aſymptote CH (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de ſorte qu'enfin leur diſtance devient moindre qu'aucune donnée ; & que cependant elles ne ſe peuvent jamais rencontrer, puiſqu'elles ne ſe joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en eſt de même pour l'autre aſymptote Cg.

COROLLAIRE V.

103. ENTRE toutes les lignes qui paſſent par le centre C, 1°. Celles qui, comme Aa, tombent dans les angles faits par les aſymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles oppoſées en un ſeul point A, ou a ; & étant prolongées, elles paſſent au dedans de ces Hyperboles. Car à cauſe des angles GCA, gCA, & de leurs oppoſés au ſommet, il eſt clair que la ligne Aa, s'éloigne de plus en plus de l'un & de l'autre aſymptote ; au lieu que les Hyperboles oppoſées s'en approchent toujours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme Bb, tombent dans les angles d'à côté, faits auſſi par les aſymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles oppoſées, quoiqu'on les prolonge à l'infini ; puiſqu'aucun des points des Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.

* *Art.* 102.

* *Art.* 91.

D'où l'on voit * que tous les premiers diametres, tombent dans les angles faits par les aſymptotes du côté des Hyperboles, & que les ſeconds tombent dans les angles d'à côté.

* *Def.* 9.

COROLLAIRE VI.

104. SI l'on mene par un point quelconque H, de l'une des aſymptotes CE, une parallèle HM, à l'autre Ce; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un ſeul point M; & étant continuée, elle paſſera au dedans. Car ſa diſtance de Ce, demeure par-tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche * toujours de plus en plus. FIG. 45.

* *Art.* 102.

COROLLAIRE VII.

105. DE-LA il eſt évident que ſi par un point quelconque M, d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies MH, Mh, parallèles à ſes aſymptotes Cc, CE.

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui eſt oppoſée, tomberont dans l'angle HMh; puiſqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par ſes aſymptotes, lequel eſt renfermé dans l'angle HMh.

* *Art.* 91.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainſi aucun de ſes points ne tombera dans l'angle oppoſé au ſommet à l'angle HMh.

3°. Toutes les lignes qui, comme MF, tombent dans l'angle HMh, rencontrent (étant prolongées du côté de F) l'Hyperbole oppoſée en un point N, & paſſent au dedans; puiſqu'elles s'écartent de plus en plus des droites MH, Mh, & par conſéquent de ſes deux aſymptotes qui leur ſont paralleles: mais étant prolongées de l'autre côté du point M, elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui paſſe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme Ee, tombent dans les angles à côté de l'angle HMh, rencontrent les deux aſymptotes de l'Hyperbole qui paſſe par le point M; ainſi lorſqu'elles paſſent au dedans de l'une de ſes portions, elles la rencontrent néceſſairement en quelque point N, puiſqu'elles vont rencontrer l'aſymptote qui tombe au dehors de cette portion.

COROLLAIRE VIII.

106. 1°. SI l'on mene par un point quelconque M, d'une Hyperbole, une ligne droite Ff, qui rencontre l'une de ſes aſymptotes au point F, & l'une des aſymptotes de l'Hyperbole oppoſée au point f; & qu'on la prolonge en N, en ſorte que fN, ſoit égale à FM: je dis que le point N, ſera à l'Hyperbole oppoſée. Car la ligne Ff, tombe dans l'angle HMh, & rencontre par conſéquent l'Hyperbole oppoſée en quelque point N, comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire précédent. Donc *, &c.

* *Art.* 95.

2°. Si l'on mene par un point quelconque M, d'une Hyperbole, une ligne droite Ee, terminée par ſes aſymptotes, & qu'on prenne ſur cette ligne, la partie eN, égale à EM: je dis que le point N, ſera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant MH, parallèle à l'aſymptote Ce, & terminée par l'autre en H, ſi l'on prend ſur cette autre aſymptote, la partie CL, égale à HE, & qu'on tire LN, parallèle à HM; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point N, & dans l'article 100, que ce point ſera tel que CL ou $HE.HM :: CH$ ou $EL.LN$; d'où l'on voit que la ligne LN, rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite Ee. Mais à cauſe des parallèles HM, LN, il eſt clair que $eN = EM$, puiſque $CL = HE$. Donc, &c.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 43.

107. D'UN *point donné* M, *ſur une Hyperbole dont les aſymptotes* CE, Ce, *ſont données; mener la tangente* DMd; *& démontrer qu'on n'en peut mener qu'une ſeule.*

Ayant mené du point donné M, une parallèle MH, à l'une des aſymptotes Ce, & terminée par l'autre CE, au point H; on prendra ſur cette aſymptote, la partie HD,

HD égale à HC; on tirera par le point donné M, la droite DM, qui rencontre l'asymptote Ce en un point d. Je dis en premier lieu, que cette ligne DMd, touchera l'Hyperbole au point M.

Car à cause des triangles semblables CDd, HDM; la ligne Dd, terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point M, de même que CD, l'est en H. Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point O, il est clair que Od, seroit * égale à MD, & par conséquent à Md, c'est-à-dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne DMd, ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point M. De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne Ee, il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point N; puisqu'elle iroit rencontrer en un point e, l'asymptote Ce, qui tombe * au dehors de cette portion. Il est donc évident que la ligne Dd, ne rencontre l'Hyperbole, qu'au seul point M, & qu'elle n'entre point au dedans; c'est-à-dire, qu'elle est tangente en ce point.

* *Art.* 95.

* *Art.* 91.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne DMd, qui puisse toucher l'Hyperbole au point M; car si l'on prend sur l'asymptote CE, la partie HE, plus grande ou moindre que HD, & qu'on tire par le point donné M, la droite EM, qui rencontre l'autre asymptote Ce, au point e, il est clair à cause des parallèles MH, Ce, que ME sera plus grande ou moindre que Me; puisque HE a été prise plus grande ou moindre que HD ou que HC. Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie Me, le point N, en sorte que Ne soit égale à ME, il est évident que ce point * sera encore à l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne Ee, ne la touchera point au point M. Ce qui restoit à démontrer.

* *Art.* 106.

REMARQUE.

108. ON a démontré dans l'art. 102, que plus CH devient grande, plus au contraire HM diminue; de ſorte que CH étant infiniment grande, HM devient infiniment petite, c'eſt-à-dire, nulle ou zéro. Or CH étant infiniment grande, HD (qui lui eſt égale) la ſera auſſi; & par conſéquent les lignes MD., HD, qui ne ſe rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme parallèles, tomberont l'une ſur l'autre, puiſque le point M ſe confond alors avec le point H: c'eſt-à-dire, que l'aſymptote CE, étant prolongée à l'infini, auſſi bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans ſon extrêmité. Il en eſt de même de l'autre aſymptote Ce, laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans ſon autre extrêmité.

D'où l'on voit que les deux aſymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles oppoſées dans leurs extrêmités.

COROLLAIRE I.

109. COMME il n'y a que la ſeule ligne DMd, laquelle étant terminée par les aſymptotes, ſoit coupée en deux parties égales au point M; il s'enſuit que ſi une ligne droite DMd, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point M, qui coupe cette ligne droite en deux parties égales; elle ſera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que ſi une ligne droite DMd, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point M; elle ſera coupée en deux parties égales par ce point.

COROLLAIRE II.

FIG. 44. 110. SI par le point touchant M d'une tangente quelconque DMd, terminée par les aſymptotes CL,

Cl, d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre MCm; & que par le point m, où il rencontre l'Hyperbole oppoſée, l'on tire une parallèle Ee, à la tangente Dd, terminée par les aſymptotes aux points E, e: je dis que cette ligne ſera tangente au point m. Car les triangles CMD, CmE, ſeront ſemblables & égaux, puiſque * CM eſt égal à Cm. La ligne mE, ſera donc égale à MD. On prouvera de même (à cauſe des triangles ſemblables & égaux CMd, Cme) que me eſt égale à MD. C'eſt pourquoi la ligne Ee eſt diviſée en deux également au point m; puiſque Dd l'eſt au point M. Et par conſéquent * elle ſera tangente en m.

* *Art.* 96.

* *Art.* 109.

D'où l'on voit que les tangentes Dd, Ee, qui paſſent par les extrêmités d'un premier diametre quelconque Mm, ſont parallèles entr'elles; & de plus égales, lorſqu'elles ſont terminées par les aſymptotes.

DÉFINITIONS.

13.

S'il y a deux diametres Mm, Ss, dont l'un Ss, ſoit parallèle aux tangentes qui paſſent par les extrêmités de l'autre Mm; & de plus terminé en S, s, par les droites MS, Ms, menées de l'une des extrêmités M du diametre Mm, parallèlement aux aſymptotes: ces deux diametres Mm, Ss, ſeront appellés enſemble *Conjugués*. FIG. 44.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles oppoſées parallèlement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, ſont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainſi NO, eſt une ordonnée au diametre Mm.

15.

Si l'on prend une troiſieme proportionnelle à deux diametres conjugués, elle ſera le *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

111. LA définition 13e convient aux deux axes ; puiſque ſelon l'article 84, le ſecond axe eſt parallèle aux tangentes qui paſſent par l'extrêmité du premier ; & que de plus, ſelon la définition 11e, il eſt terminé par deux droites i...nées de l'une des extrêmités du premier axe, parallèlement aux aſymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diametres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

COROLLAIRE II.

112. COMME le diametre SCs, eſt parallèle à la tangente DMd, qui paſſe par l'une des extrêmités M du diametre MCm, & que cette tangente rencontre les deux aſymptotes CD, Cd, de l'Hyperbole, qui paſſe par le point M : il s'enſuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle DCd, fait par les aſymptotes de cette Hyperbole ; & qu'ainſi c'eſt un ſecond diametre.

D'où l'on voit qu'entre deux diametres conjugués MCm, SCs ; il y en a toujours un premier Mm, & un ſecond Ss.

COROLLAIRE III.

113. LE ſecond diametre SCs, eſt coupé par le milieu au centre C, & de plus égal à la tangente DMd, qui paſſant par l'une des extrêmités M du premier diametre Mm, qui lui eſt conjugué, eſt terminée par les aſymptotes. Car à cauſe des parallèles MS, Cd, & Ms, CD ; il eſt clair que CS eſt égale à Md, & Cs à MD. Or DMd, eſt diviſée * en deux parties égales au point touchant M. Donc, &c.

* Art. 109.

COROLLAIRE IV.

114. DEUX diametres conjugués Mm, Ss, étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt un premier diametre ; il ne faut pour avoir les aſymptotes CD, Cd, que

tirer par le centre C, des parallèles aux deux droites MS, Ms, menées de l'une des extrêmités M, du premier diametre Mm, aux deux extrêmités S, s, du ſecond.

Et réciproquement les deux aſymptotes CD, Cd, d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ſes points M; il ne faut pour avoir deux de ces diametres conjugués MCm, SCs, que tirer MH parallèle à l'une des aſymptotes Cd, qui rencontre l'autre aſymptote CD en H; & l'ayant prolongée en S, en ſorte que HS ſoit égale à HM, mener les droites CM, CS. Car tirant MD parallèle à CS, il eſt clair à cauſe des triangles ſemblables CHS, MHD, que HD eſt égale à HC; puiſque MH eſt égale à HS; & qu'ainſi * MD eſt tangente en M: d'où il ſuit ſelon la définition 13e, que les lignes CM, CS, ſont deux demi-diametres conjugués. * Art. 107.

Il eſt donc évident que deux diametres conjugués Mm, Ss, étant donnés de poſition & de grandeur, & ſçachant de plus lequel des deux eſt un premier diametre; on a les deux aſymptotes CD, Cd, avec l'un des points M, de l'une des Hyperboles oppoſées.

Et réciproquement que les aſymptotes CD, Cd, d'une Hyperbole étant données, avec un de ſes points M; on a deux de ſes diametres conjugués Mm, Ss, de poſition & de grandeur; & l'on ſçait lequel des deux eſt un premier diametre; ſçavoir, celui qui paſſe par le point donné M.

COROLLAIRE V.

115. UN ſecond diametre SCs, étant donné de poſition, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diametre Mm, qui lui eſt conjugué; on lui menera par-tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les aſymptotes, une parallèle Ll, terminée par les aſymptotes en L, l; & par ſon point de milieu O, le premier diametre CO, qui rencontrera l'Hyperbole en

un point M; par lequel ayant tiré les droites MS, Ms, parallèles aux aſymptotes; il eſt clair, ſelon la définition 13e, que les points S, s, où elles rencontrent le ſecond diametre SCs, donné de poſition, en déterminent la grandeur, & que le premier diametre MCm lui eſt conjugué. Car menant par le point M, la ligne Dd, parallèle à Ll, & terminée par les aſymptotes, elle ſera coupée en deux également au point M; puiſque Ll, l'eſt au point O: & partant * elle ſera tangente en M.

* *Art.* 109.

De-là, il eſt évident qu'un ſecond diametre SCs, étant donné de poſition, ſa grandeur eſt déterminée en ſorte qu'il ne peut en avoir qu'une ſeule; comme auſſi la grandeur & la poſition du premier diametre Mm, qui lui eſt conjugué.

COROLLAIRE VI.

116. UN ſecond diametre SCs, étant donné de poſition & de grandeur, avec ſon parametre, & la poſition de ſes ordonnées; il ſera facile de trouver de poſition & de grandeur le premier diametre MCm, qui lui eſt conjugué, avec ſon parametre. Car ayant mené par le centre C, une parallèle indéfinie aux ordonnées du diametre Ss, on marquera ſur cette ligne deux points M, m, également éloignés de part & d'autre du centre C, en ſorte que Mm, ſoit égale à la moyenne proportionnelle entre le ſecond diametre Ss, & ſon parametre. Puis ayant trouvé une troiſieme proportionnelle aux deux lignes Mm, Ss, il eſt clair, ſelon les définitions 14 & 15, que Mm, ſera le premier diametre conjugué au diametre Ss, & qu'il aura pour ſon parametre cette troiſieme proportionnelle.

PROPOSITION VII.

Théorême.

FIG. 44.

117. *LE quarré d'une ordonnée quelconque* ON, *au premier diametre* Mm, *eſt au rectangle de* MO *par* Om,

parties de ce diametre prolongé ; comme le quarré de ſon conjugué Ss, *eſt au quarré de ce premier diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}.MO\times Om :: \overline{Ss}.\overline{Mm}$.

Ayant mené par l'une des extrêmités M, du premier diametre Mm, une parallèle Dd au ſecond diametre Ss, terminée par les aſymptotes ; elle ſera tangente en M, ſelon la définition 13e. Et par conſéquent * elle ſera coupée en deux également par ce point : c'eſt pourquoi, ſi l'on prolonge l'ordonnée ON (qui ſelon la définition 14, eſt parallèle au diametre Ss) de part & d'autre du diametre Mm, elle rencontrera les aſymptotes en deux points L, l, qui ſeront également éloignés de part & d'autre du point O. Cela poſé, ſoient nommées les données CM, ou Cm, t; CS, ou Cs, ou * MD, ou Ml, c; & les indéterminées CO, x; ON, y; on aura à cauſe des triangles ſemblables CMD, COL; cette proportion : $CM(t).MD(c) :: CO(x).OL$ ou $Ol=\frac{cx}{t}$. Donc LN ou $LO\pm ON=\frac{cx}{t}\pm y$, & Nl ou $Ol\mp NO=\frac{cx}{t}\mp y$; & partant $LN\times Nl=\frac{ccxx}{tt}-yy=$ * $DM\times Ml=cc$. D'où il ſuit que $\overline{ON}(yy).MO\times Om(xx-tt) :: \overline{Ss}(4cc).\overline{Mm}(4tt)$. Puiſqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy=4ccxx-4cctt$, c'eſt-à-dire (en diviſant par $4tt$, & tranſpoſant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{ccxx}{tt}-yy=cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 107.

* *Art.* 113.

* *Art.* 90.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

118. IL eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la Propoſition ſeconde *, par rapport aux deux axes Aa, Bb, s'étend par le moyen de cette Propoſition à deux diametres conjugués quelconques, Mm, Ss. Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, ſe tirent de la ſeconde Propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que l'angle ACB, ſoit droit ou qu'il ne le ſoit pas ; il s'en-

* *Art.* 79.

Digitized by Google

ſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques, ces articles ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition: car leur démonſtration demeure toujours la même; & il ne faut pour s'en convaincre entiérement, que les relire en mettant par-tout où ſe trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

PROPOSITION VIII.

Théorême.

FIG. 45. 119. SOIENT *deux tangentes quelconques* DE, FG, *d'une Hyperbole* MA, *terminées par les aſymptotes, & qui s'entrecoupent en un point* O; *je dis que les côtés des triangles* CDE, CFG, *autour de l'angle* C, *ſont réciproquement proportionnels.*

Il faut prouver que CD. CF:: CG. CE.

Ayant mené par les points touchans *M*, *A*, les parallèles *MH*, *AL*, à l'aſymptote *CG*; il eſt clair à cauſe des triangles ſemblables *CDE*, *HDM*, que *CD* eſt double de *CH*, & *CE* double de *HM*; puiſque *DE* * *Art.* 109. eſt * double de *DM*. Et à cauſe des triangles ſemblables *CFG*, *LFA*, que *CF* eſt double de *CL*, & *CG* * *Art.* 100. double de *LA*; puiſque *FG*, eſt double de *FA* Or * *CH*. *CL*:: *LA*. *HM*. Et partant ſi l'on prend le double de chaque terme, on aura 2 *CH* ou *CD*. 2 *CL* ou *CF*:: 2 *LA* ou *CG*. 2 *HM* ou *CE*. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

120. IL ſuit de cette Propoſition que les droites *DG*, *FE*, ſont parallèles entr'elles. D'où il eſt évident:

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, ſont égaux; car les triangles *FDE*, *FGE*, qui ont la même baſe *FE*, & qui ſont entre les mêmes parallèles *DG*, *FE*, ſont égaux; & partant, ſi l'on ajoute de part & d'autre le même

même triangle CFE, on formera les triangles CDE, CFG, qui ſeront égaux entr'eux.

2°. Que la ligne DE, eſt coupée en même raiſon aux points M, O, que la ligne FG l'eſt aux points A, O. Car menant par les points touchans la droite MA, il eſt clair qu'elle ſera parallèle aux deux droites DG, FE; puiſqu'elle coupe par le milieu les droites DE, FG, renfermées entre ces parallèles.

PROPOSITION IX.

Théorême.

121. SI *par un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ſes diametres* A a *que l'on voudra, & une tangente* MT *qui le rencontre en* T; *je dis que* CP. CA :: CA. CT. *en obſervant que les points* P, T, *tombent du même côté du centre* C, *lorſque la ligne* A a *eſt un premier diametre; & au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre, lorſque c'eſt un ſecond diametre.* FIG. 46 & 47.

Premier cas. Lorſque la ligne Aa eſt un premier diametre. On prolongera la tangente MT juſqu'à ce qu'elle rencontre les aſymptotes CD, CG, aux points D, E; & l'ordonnée PM, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote CD au point N; on menera enſuite par le point A la ligne AK, parallèle à DE, qui rencontre l'aſymptote CG au point K, & la tangente FG terminée par les aſymptotes, qui ſera parallèle * à PM, & qui rencontre au point O l'autre tangente DE. FIG. 46. * *Déf.* 14.

Cela poſé, AP eſt à AC, ou FN à FC, en raiſon compoſée de FN à FD, ou de OM à OD, ou * de OA à OG, ou de EK à EG, & de FD à FC, ou * de EG à EC. Or AT eſt à TC, ou KE à EC, en raiſon compoſée de EK à EG, & de EG à EC. Donc $AP. AC :: AT. TC$. puiſque les raiſons compoſantes de ces deux raiſons ſont les mêmes; & par conſéquent $AP + AC$ ou $CP. CA :: AT + TC$ ou $CA. CT$. *Ce qui étoit propoſé en premier lieu.* * *Art.* 120. * *Art.* 120.

FIG. 47. *Second cas.* Lorſque la ligne Aa eſt un ſecond diametre. Ayant mené par le centre C la ligne CK parallèle à l'ordonnée PM, qui rencontre l'Hyperbole au point B, & la tangente MT au point R, & par le point touchant M la ligne MK parallèle à Aa; il eſt clair que CB ſera le premier demi-diametre conjugué au ſecond Aa, & qu'ainſi MK ſera ordonnée à ce diametre.

Cela poſé, ſi l'on nomme les données CA ou Ca, t; CB, c; & les indéterminées CP ou MK, x; PM ou CK, y; on aura ſelon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR=\frac{cc}{y}$; & partant RK ou $CK-CR=\frac{yy-cc}{y}$. Or les triangles ſemblables KRM, CRT, donnent $KR\left(\frac{yy-cc}{y}\right).RC\left(\frac{cc}{y}\right)::MK(x).CT=\frac{ccxx}{yy-cc}=\frac{tt}{x}$. en mettant pour $yy-cc$ ſa valeur $\frac{ccxx}{tt}$ tirée de ce que $yy=$ * $\frac{ccxx}{tt}+cc$. C'eſt-à-dire que $CP.CA::CA.CT$. *Ce qui reſtoit à démontrer.*

* *Art.* 80 & 118.

PROPOSITION X.

Théorême.

FIG. 48 & 49. 122. SI *par un point quelconque* M *d'une Hyperbole qui a pour centre le point* C, *ou même une ordonnée* M P *à l'un ou à l'autre axe* A a, *& une perpendiculaire* M G *à la tangente* M T, *laquelle paſſe par* M : *je dis que* C P *ſera toujours à* P G *en la raiſon donnée de l'axe* A a *à ſon Parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t; & les indéterminées CP, x; PM, y; on aura * $CT=\frac{tt}{x}$; & partant $PT=\frac{xx\mp tt}{x}$, ſelon que Aa eſt le premier ou le ſecond axe. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent $TP\left(\frac{xx\mp tt}{x}\right).PM(y)::PM$

* *Art.* 121.

(y). $PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$. D'où l'on tire cette proportion CP (x). $PG\left(\frac{xyy}{xx \mp tt}\right) :: \overrightarrow{CP} \mp \overrightarrow{CA}\ (xx \mp tt).\ \overrightarrow{PM}\ (yy)$. puiſqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on trouve le même produit xyy. Mais $\overrightarrow{CP} \mp \overrightarrow{CA}$ eſt à $\overrightarrow{PM}$, comme * l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc CP eſt auſſi à PG en cette même raiſon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 81.

PROPOSITION XI.

Théorême.

123. SI *d'un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on tire à ſes deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf; *je dis que la tangente* MT, *qui paſſe par ce point* M, *diviſe en deux également l'angle* FMf. FIG. 50.

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, ſur la tangente MT; le premier axe Aa, qui paſſe par les foyers F, f, & qui rencontre la tangente en T; & l'ordonnée MP, à cet axe: on nommera les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x. L'on aura MF * $\left(\frac{mx}{t} - t\right)$. $Mf\left(\frac{mx}{t} + t\right) :: TF$ ou CF $(m) - CT$ * $\left(\frac{tt}{x}\right)$. Tf ou $Cf\,(m) + CT\left(\frac{tt}{x}\right)$. puiſqu'en mulipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Or les triangles rectangles ſemblables TFD, Tfd, donnent $TF.\,Tf :: FD.\,fd$. L'hypothénuſe MF du triangle rectangle MDF, ſera donc à l'hypothénuſe Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF eſt au côté df; & par conſéquent ces deux triangles ſeront ſemblables. Donc les angles FMD, fMd, qui ſont oppoſés aux côtés homologues DF, df, ſeront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 78.

* *Art.* 121.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

124. DE-LA il eſt évident que la tangente MT, étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laiſſe l'Hyperbole AM, toute entiere du côté de ſon foyer intérieur F. Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point M, il eſt viſible qu'elle ſera concave dans toute ſon étendue autour de ſon foyer intérieur F.

PROPOSITION XII.

Théorême.

FIG. 51. 125. LA *différence des quarrés de deux diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, *eſt égale à la différence des quarrés des deux axes* Aa, Bb.

Il faut prouver que $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$, *ou que* $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$.

* *Déf.* 11 & 13. Si l'on mene les droites MS, AB, elles ſeront * paralleles à l'aſymptote Cg, & de plus coupées en deux également par l'autre aſymptote CG, aux points H, G;

* *Déf.* 11. & 13. puiſque les lignes Ms, Ab, ſont parallèles à cette aſymptote, & que les ſeconds diametres Ss, Bb, ſont coupés * en deux également au centre C: c'eſt pourquoi ſi l'on mene ſur l'aſymptote CG, les perpendiculaires AF, BE, ML, SK, on formera les triangles GAF, GBE, & HML, HSK, qui ſeront ſemblables & égaux. Cela poſé, ſoient nommées les données CG ou * GA, m; GE ou GF, a; AF ou BE, b; & les indéterminées CH, x; HM, y: ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ ou $\overline{CB}^2 = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$ ou $\overline{CA}^2 = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4am$. Or les triangles ſemblables GAF, HML, fourniſſent $GA(m).AF(b) :: HM(y).ML$ ou $KS = \frac{by}{m}$. Et $GA(m).GF(a) :: HM$

* *Art.* 113.

* *Art.* 88.

(y). HL ou $HK = \frac{ay}{m}$. Donc $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$ ou $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $\overline{CL}^2 + \overline{LM}^2$ ou $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$. Et partant $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$, en mettant pour xy sa valeur * mm. Donc $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$; *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 101.

Si l'angle GCg, fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; CF seroit alors plus grande que CE, & on prouveroit de la même maniere que $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$. Mais si l'angle GCg fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes AB, MS, seroient perpendiculaires sur l'asymptote CG; & qu'ainsi les deux demi-diametres conjugués CM, CS, seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes CA, CB. Or comme alors la différence des deux diametres conjugués Mm, Ss, est nulle, aussi bien que celle des deux axes Aa, Bb; il s'ensuit que cette Proposition est vraie dans tous les cas.

COROLLAIRE.

126. DE-LA il est évident qu'un premier diametre quelconque Mm, est moindre, plus grand, ou égal au second diametre Ss, qui lui est conjugué; selon que l'angle GCg, fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

DÉFINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appellées *Equilateres*, lorsque deux de leurs diametres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

COROLLAIRE.

FIG. 52. 127. SI d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatere, l'on mene une ordonnée MP à tel de ſes
* *Art.* 81 & 118. diametres Aa qu'on voudra, on aura * $\overline{MP} = \overline{CP} \mp \overline{CA}$: ſçavoir —, lorſque Aa eſt un premier diametre ; & +, lorſque c'eſt un ſecond. Car le diametre conjugué
* *Art.* 126. au diametre Aa * lui ſera toujours égal

PROPOSITION XIII.

Problême.

FIG. 53, 54 & 55. 128. DEUX *diametres conjugués quelconques étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt le premier ; ou ce*
* *Art.* 114. *qui revient au méme, les aſymptotes* CD, CF, *d'une Hyperbole étant données, avec un de ſes points quelconques* M : *mener deux diametres conjugués* Aa, Bb, *qui faſſent entr'eux un angle égal à un angle donné.*

Ayant coupé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point o, un arc dcf capable de l'angle DCF fait par les aſymptotes ; on menera par le point de milieu e, de la corde df, la ligne ec qui faſſe avec cette corde de part ou d'autre l'angle dec ou fec égal à l'angle donné ; & par le point c, où elle rencontre l'arc dcf, les droites cd, cf. Cela fait, on prendra ſur les aſymptotes les parties CD, CF, égales aux cordes cd, cf ; & ayant tiré DF, l'on menera le ſecond diametre Bb parallèle à cette ligne, & le premier diametre Aa qui paſſe par ſon milieu E. Je dis que ces deux diametres Aa, Bb, ſont entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils ſont conjugués l'un à l'autre.

Car par la conſtruction l'angle dcf eſt égal à l'angle DCF fait par les aſymptotes ; & par conſéquent les triangles DCF, dcf, & DCE, dce, ſont égaux & ſemblables. L'angle BCa, que font entr'eux les deux diametres Aa, Bb, ſera donc égal à l'angle DEC ou dec

qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, ſi l'on mene par le point A, que je ſuppoſe être l'une des extrêmités du premier diametre Aa, une parallèle à DF; il eſt clair qu'elle ſera coupée également par ce point, puiſque DF l'eſt au point E; & qu'ainſi * elle ſera tangente en A; d'où il ſuit * que les diametres Aa, Bb, ſont conjugués. * *Art.* 109. * *Def.* 13.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diametres, on tirera par le point donné M, une parallèle MKL au premier diametre Aa, laquelle rencontre l'aſymptote CD au point K, & l'autre aſymptote CF, prolongée au-delà du centre C, au point L: & ayant pris CA moyenne proportionnelle entre KM, ML; il eſt clair * que le point A ſera l'une des extrêmités du premier diametre Aa; & qu'ainſi menant les lignes AB, ab, parallèles aux aſymptotes CF, CD, elles * détermineront par leurs points de rencontre B, b, la grandeur du ſecond diametre Bb. * *Art.* 94. * *Déf.* 13.

Comme l'on peut mener deux différentes lignes ec, ec, qui faſſent avec la corde df, de part & d'autre des angles dec, fec, égaux à l'angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit; il s'enſuit qu'on pourra toujours trouver alors deux différens diametres conjugués Aa, Bb, qui ſatisferont également, comme l'on voit dans les figures 54 & 55. Mais il eſt à remarquer que les diametres conjugués Aa, Bb, de la fig. 55, ont une poſition ſemblable par rapport à l'aſymptote CF, à ceux de la figure 54 par rapport à l'autre aſymptote CD; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux différentes poſitions. Car,

1°. Menant du centre o au point e, milieu de la corde df, la ligne oe, elle ſera perpendiculaire à cette corde, & par conſéquent les angles oec, oec, ſeront égaux; c'eſt pourquoi tirant les rayons oc, oc, les triangles oec, oec, qui ont le côté oe commun, les angles oec, oec, & les côtés oc, oc, égaux entr'eux, auront auſſi leurs troiſiemes côtés ec, ec, égaux. Les triangles fec, dec, qui ont les côtés ef, ed, & ec, ec, & les

angles fec, dec, égaux, ſeront donc égaux & ſemblables ; d'où l'on voit que l'angle ecf, ou ECF, de la figure 55, eſt égal à l'angle ecd, ou ECD, de la fig. 54 ; & qu'ainſi la poſition du diametre Aa, de la fig. 55, par rapport à l'aſymptote CF, eſt ſemblable à celle du diametre Aa, de la figure 54, par rapport à l'autre aſymptote CD.

2°. Si l'on mene dans la figure 55, la ligne Ml, qui faſſe avec l'aſymptote CF, prolongée du côté du centre C, l'angle MlC égal à l'angle MLC ou ECF, de la figure 54 : il eſt clair que les lignes Ml, Mk, de la figure 55, ſeront égales aux lignes ML, MK, de la figure 54 ; puiſqu'on ſuppoſe que la poſition du point M par rapport aux aſymptotes, eſt la même dans ces deux figures. Or l'angle MlL, complement à deux droits de l'angle MlC, de la figure 55, ou de ECF de la figure 54, eſt égal à l'angle MKk, complement à deux droits de l'angle ECD de la fig. 55, ou de ECF de la fig. 54 ; & par conſéquent dans la fig 55 les deux triangles LMl, kMK, qui ont l'angle en M commun, & les angles aux points l, K, égaux, ſeront ſemblables : ce qui donne $LM. Ml :: kM. MK$. Et partant $LM \times MK = lM \times Mk$ ou $LM \times MK$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi diametres CA, CA, des figures 54 & 55, ſont égaux. Il en eſt de même du diametre Bb ; puiſque ſa poſition & ſa grandeur dépendent de celles du premier diametre Aa, auquel il eſt conjugué.

* *Art.* 94.

Comme l'on ne peut mener qu'une ſeule ligne ec, qui faſſe avec la corde df de part ou d'autre, un angle égal à l'angle donné, lorſque cet angle eſt droit ; il s'enſuit qu'il n'y a que deux diametres conjugués Aa, Bb, qui faſſent entr'eux un angle droit ; & qu'ainſi * ils ſeront les deux axes. Mais le triangle dcf ou DCF, étant alors iſoſcelle, le premier axe Aa diviſera par le milieu l'angle DCF fait par les aſymptotes ; d'où l'on voit que pour trouver de poſition les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites Aa, Bb, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles Aa, diviſe par le milieu l'angle DCF,

Fig. 56 & 57.

* *Art.* 111.

DCF, fait par les aſymptotes : après quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enſeigner pour les diametres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre maniere. Soit menée par le point donné M une parallèle MH à l'une des aſymptotes CF, & terminée par l'autre CD au point H. Soit priſe ſur l'aſymptote CD, la partie CG égale à la moyenne proportionnelle entre CH, HM : & ſoit tirée par le point G une parallèle AB à CF, telle que chacune de ſes parties GA, GB, ſoit égale à CG. Il eſt évident que les lignes CA, CB, * ſeront les deux demi-axes de poſition & de grandeur.

* *Art.* 101 & 88.

COROLLAIRE.

129. IL eſt donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle droit ; & qu'ainſi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux différens diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit ; que les deux premiers ont une poſition ſemblable par rapport à une aſymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre aſymptote ; d'où il ſuit qu'ils ſont ſemblablement poſés de part & d'autre des deux axes, puiſque les deux axes diviſent par le milieu les angles faits par les aſymptotes ; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux différentes poſitions.

PROPOSITION XIV.

Problême.

130. DEUX *diametres conjugués quelconques étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt le premier ; ou ce qui eſt la même choſe* * *les aſymptotes de deux Hyperboles oppoſées étant données avec un de leurs points quelconque : décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.*

* *Art.* 114.

PREMIERE MANIERE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enſeigner dans la Propoſition précédente ; & l'on décrira enſuite les Hyperboles oppoſées ſelon l'article 76.

SECONDE MANIERE.

FIG. 58. Soient Aa, Bb, les diametres conjugués donnés, entre leſquels le diametre Aa eſt le premier ; ou bien CG, Cg, les aſymptotes données, avec le point A, un de ceux des Hyperboles oppoſées. Ayant mené par le point donné A une parallèle AG, à l'une des aſymptotes Cg, & terminée par l'autre en G, on fera gliſſer le long de l'aſymptote CG, indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre C, une droite HK égale à CG, qui entraînera par ſon extrêmité H une parallèle HM à l'aſymptote Cg, & par ſon autre extrêmité K, une droite KA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des droites AK, HM, décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles oppoſées qu'on demande.

Car à cauſe des triangles ſemblables KHM, KGA, on aura toujours KH ou CG. HM :: KG ou CH. GA. Et partant $CH \times HM = CG \times GA$. Le point M ſera donc * un des points de l'Hyperbole qui paſſe par le point donné A, & qui a pour aſymptotes les droites données CG, Cg ; ou de l'Hyperbole oppoſée.

* *Art.* 101.

PROPOSITION XV.

Problême.

131. LES *mêmes choſes étant données que dans la Propoſition précédente ; décrire les Hyperboles oppoſées par pluſieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 59. Soient CD, CE, les aſymptotes données, & A le

point donné. Ayant mené par ce point A autant de lignes DE, DE, DE, &c. qu'on voudra, terminées par les asymptotes; & ayant pris sur ces lignes droites les parties EM, EM, EM, &c. égales à AD, AD, AD, &c; sçavoir chacune à sa correspondante : il est clair * 1°. Que les points M, M, M, &c. seront à l'Hyperbole qui passe par le point A, lorsque les points E, E, E, &c. tombent au-dessous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites CD, CE. Faisant donc passer par tous les points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle opposé au sommet à celui-ci, une autre ligne courbe; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. * *Art.* 106.

SECONDE MANIERE.

Soient les lignes Aa, Bb, les deux diametres conjugués donnés, entre lesquels Aa est le second. Ayant pris sur le premier demi-diametre CB prolongé indéfiniment du côté de B, de petites parties $CE, E\dot{E}, EE$, &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra; on menera par celui des points E, qui est le plus proche du centre C, la ligne EP parallèle à BA; & on prendra sur le second diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de petites parties CP, PP, PP, &c. toutes égales à CP, qu'il y a de petites parties CE, $EE, E\dot{E}$, &c. Ayant tiré CD perpendiculaire & égale à CB, on menera par tous les points P, P, P, &c. des parallèles MPM, MPM, MPM, &c. au premier diametre Bb, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à sa correspondante ED. Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les points M ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. FIG. 60.

Car nommant les données CA, t; CB ou CD, c; &

les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles semblables CAB, CPE, donneront cette proportion $CA\,(t).\ CB\,(c) :: CP\,(x).\ CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle ECD rectangle en C, (en imaginant chaque hypothénuse ED qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré $\overline{ED}$ ou $\overline{PM}\,(yy) = CE\left(\frac{ccxx}{tt}\right) + \overline{CD}\,(cc)$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au second diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb; & comme cette démonstration convient à toutes les lignes PM, puisque chaque CP est toujours à la correspondante CE, en la raison de CA à CB: il s'ensuit, &c.

* *Art.* 81 & 118.

FIG. 61. Lorsque les diametres conjugués Aa, Bb, sont égaux entr'eux, c'est-à-dire *, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont équilateres; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené CD perpendiculaire & égale à CA, & tiré par un point quelconque P du diametre Aa, une parallèle MPM au premier diametre Bb; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point P, les parties PM, PM, égales chacune à PD, pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle PCD rectangle en C (en imaginant chaque hypothénuse CD) on aura toujours $\overline{PD}$ ou $\overline{PM} = \overline{CP} + \overline{CD}$ ou $\overline{CA}$; & partant la ligne PM sera * une ordonnée au second diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb qui lui est égal.

* *Def.* 16.

* *Art.* 127.

DÉFINITION.

17.

FIG. 62. Soient deux Hyperboles opposées AM, am, qui ayent pour premier axe la ligne Aa, & pour second axe la ligne Bb; & soient deux autres Hyperboles opposées BS, bs, qui ayent au contraire pour premier axe la ligne Bb, & pour second axe la ligne Aa: ces deux nouvelles Hyperboles BS, bs, sont appellées *Conjuguées*

aux deux premieres AM, am; & les quatre enſemble ſont appellées Hyperboles *conjuguées.*

COROLLAIRE.

132. IL eſt clair que les lignes Ba, Ab, ſont paralleles; puiſque les droites Aa, Bb, terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point C. D'où il ſuit, ſelon la définition 11e, que l'Hyperbole BS conjuguée à AM, a pour l'une de ſes aſymptotes la ligne CG aſymptote de l'Hyperbole AM; & pour l'autre, la ligne Cg autre aſymptote de l'Hyperbole AM indéfiniment prolongée du côté de C: puiſque ces deux lignes paſſent par le centre C, & ſont parallèles aux deux droites Ba, BA, menées de l'extrêmité B du premier axe Bb de l'Hyperbole BS aux deux extrêmités A, a, du ſecond. Il eſt donc évident que les deux droites CG, Cg, parallèles à Ab, AB, indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre C, ſont non-ſeulement les aſymptotes des Hyperboles oppoſées AM, am; mais auſſi des deux autres BS, bs, qui leur ſont conjuguées.

* *Déf.* 4 & 5.

PROPOSITION XVI.

Théorême.

133. SI *l'on mene par un point quelconque* H *d'une aſymptote* CG *commune aux deux Hyperboles* AM, BS, *une parallèle* MS *à l'autre aſymptote* Cg; *je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points* M, S, *qui ſeront également éloignés de part & d'autre du point* H.

Car, 1°. la ligne MS rencontrera * chacune des Hyperboles AM, BS, en un point. 2°. A cauſe de l'Hyperbole AM, le rectangle * $CH \times HM = CG \times GA$; & à cauſe de l'Hyperbole BS, le rectangle $CH \times HS = CG \times GB$. Donc, puiſque * $GB = GA$, il s'enſuit que $CH \times HS = CH \times HM$; & qu'ainſi $HS = HM$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 104.

* *Art.* 101.

* *Art.* 88.

COROLLAIRE I.

134. SI l'on mene des points M, S, des deux Hyperboles AM, BS, les diametres MCm, SCs, terminés par les deux autres Hyperboles am, bs; il eſt clair * que le diametre Ss ſera le ſecond diametre conjugué au premier Mm des deux Hyperboles oppoſées AM, am; & réciproquement que le diametre Mm ſera le ſecond diametre conjugué au premier Ss des deux Hyperboles oppoſées BS, bs. D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, de deux Hyperboles oppoſées AM, am, ſont auſſi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles BS, bs, qui leur ſont conjuguées; avec cette différence que le premier diametre Mm devient le ſecond, & qu'au contraire le ſecond Ss devient le premier.

* *Art.* 114.

COROLLAIRE II.

135. DE-LA il eſt manifeſte que les Hyperboles conjuguées BS, bs, aux deux AM, am, paſſent par les extrêmités S, s, de tous les ſeconds diametres SCs de ces Hyperboles : & réciproquement que les Hyperboles AM, am, paſſent par les extrêmités M, m, de tous les ſeconds diametres MCm des deux Hyperboles BS, bs, qui leur ſont conjuguées.

QUATRIEME LIVRE.

DES TROIS SECTIONS CONIQUES.

DÉFINITION.

ON entend par le terme général de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précédens ; ſçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipſe*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles oppoſées*.

PROPOSITION I.

Théorême.

136. SI *par l'extrémité* A *d'un diametre quelconque* Aa *d'une Ellipſe, ou d'un premier diametre* Aa *d'une Hyperbole, l'on mene une parallèle* AG *à ſes ordonnées* PM, *qui ſoit égale à ſon parametre ; & qu'on tire de l'autre extrémité* a, *la droite* aG, *qui coupe en* O *une ordonnée quelconque* PM *prolongée s'il eſt néceſſaire : je dis que le quarré de l'ordonnée* PM *eſt egal au rectangle de* AP *par* PO. Fig. 63 & 64.

Il faut prouver que $\overline{PM} = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55 du ſecond Livre, 81 & 118 du troiſieme, on aura $Aa.AG :: AP \times Pa.\overline{PM}$. Or à cauſe des triangles ſemblables aAG, aPO, il vient $Aa.AG :: Pa.PO :: AP \times Pa.AP \times PO$. Donc $\overline{PM} = AP \times PO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

137. DE-LA il eſt évident que le quarré d'une ordonnée quelconque PM à un diametre Aa, eſt toujours moindre dans l'Ellipſe, & toujours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du parametre AG

par la partie AP de ce diametre, priſe entre ſon origine ou extrêmité A, & la rencontre P de l'ordonnée; au lieu que dans la Parabole * ils ſont égaux. Or c'eſt à cauſe de cette propriété, que Apollonius, ſurnommé le *Grand Géometre*, a impoſé aux Sections Coniques les noms que nous avons marqués : car il a voulu donner à entendre par celui de *Parabole*, la juſteſſe ou exactitude ; par celui d'*Ellipſe*, le défaut ou manquement ; & par celui d'*Hyperbole*, l'excès qui ſe trouve dans la comparaiſon des quarrés des ordonnées PM, avec les rectangles correſpondans $AP \times AG$.

* *Art.* 7 & 20.

FIG. 65.

PROPOSITION II.

Théorême.

FIG. 66 & 67. 138. DANS *une Ellipſe tout diametre* A a, *& dans les Hyperboles oppoſées tout premier diametre* A a *eſt diviſé en deux également par le centre* C, *& ne rencontre la Section qu'en deux points.*

On a démontré cette Propoſition dans les articles 50 du ſecond Livre ; 96 & 103 du troiſieme.

PROPOSITION III.

Théorême.

139. IL *ne peut y avoir qu'une ſeule tangente* LAL *qui paſſe par un point donné* A *ſur une Section Conique.*

Cette Propoſition ſe trouve démontrée dans les articles 21 du Livre premier ; 56 du Livre ſecond ; & 107 du troiſieme.

PROPOSITION IV.

Théorême.

140. LES *tangentes* LAL, lal, *qui paſſent par les extrémités* A, a, *d'un diametre quelconque d'une Ellipſe, ou de deux*

deux Hyperboles oppoſées ; ſont parallèles entr'elles.

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre ſecond, & 110 du Livre troiſieme.

PROPOSITION V.

Théorême.

141. UN *diametre quelconque étant donné dans l'Ellipſe ou dans les Hyperboles oppoſées ; je dis que la poſition du diametre qui lui eſt conjugué, eſt déterminée, de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.*

Car, 1°. ſi la Section eſt une Ellipſe, ou qu'étant les Hyperboles oppoſées le diametre donné *A a* ſoit un premier diametre ; il eſt clair ſelon l'article 56 du Livre ſecond, & la définition 13e du troiſieme Livre, que ſon conjugué *B b* ſera parallèle à la tangente *L A L*, qui paſſe par l'une de ſes extrêmités *A*. Donc *, &c. * *Art.* 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles oppoſées, le diametre donné *B b* eſt un ſecond diametre ; la choſe a été démontrée dans l'article 115 du troiſieme Livre.

COROLLAIRE.

142. IL eſt donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ſes diametres, la poſition des ordonnées à ce diametre, ſera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une ſeule, & qu'elles ſont toutes parallèles entr'elles. Car elles doivent être parallèles dans la Parabole * à la tangente qui paſſe par l'origine du diametre donné, & dans les autres * Sections au diametre conjugué au diametre donné. * *Art.* 21. * *Déf.* 12, II. & 14, III.

PROPOSITION VI.

Théorême.

143. DANS *une Ellipſe tout diametre* A a, *& dans les Hyperboles oppoſées tout premier diametre* A a *diviſe*

la Section en des portions AM, am, *qui étant prises de part & d'autre de ce diametre dans des positions contraires, sont parfaitement semblables & égales entr'elles.*

Car ayant pris sur le diametre *A a* (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du centre *C* deux parties quelconques *CP*, *Cp*, égales entr'elles ; & mené de part & d'autre les ordonnées *PM*, *pm*, il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles, & que les angles *CPM*, *Cpm*, sont * égaux. Si donc l'on conçoit que le plan *Cpm* séparé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diametre *Aa* dans une position contraire, en sorte que la droite *Cp* tombe sur *CP*, & *pm*, sur *PM* ; il est visible que le point *a* tombera * sur le point *A*, & le point *m* sur le point *M*. Et comme cela arrivera toujours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties *CP*, *Cp* ; il s'ensuit que tous les points *m* de la portion *am*, tomberont exactement sur tous les points *M* de la portion *AM* ; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 45, 55, 85 & 118.

* *Art.* 142.

* *Art.* 138.

PROPOSITION VII.

Théorême.

Fig. 68, 69, 70, 71.

144. SI *l'on mene par un point quelconque* P *d'un diametre* Aa *d'une Section Conique* (*prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diametre*) *une parallèle* MPM *aux ordonnées à ce diametre ; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points* M, M, *également éloignés de part & d'autre du point* P, *& non en davantage : & réciproquement que si une ligne* MM *terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre* Aa *en un point* P, *autre que le centre, elle sera parallèle aux ordonnées à ce diametre.*

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 20 du Livre premier ; 43, 45 & 55 du Livre second ; 83, 85 & 118 du Livre troisieme.

COROLLAIRE I.

145. DE-LA il eſt manifeſte que ſi une ligne quelconque MM terminée par une Section Conique, eſt coupée en deux également par un diametre Aa en un point P autre que le centre ; toutes les parallèles à cette ligne terminées par la Section, le ſeront auſſi.

PROPOSITION VIII.

Problême.

146. UNE *Section Conique étant donnée, en trouver un diametre.*

Ayant mené deux droites MM, NN, parallèles entr'elles, & terminées par la Section ; on tire a par leurs points de milieu P, Q, une ligne droite Aa qui ſera un diametre.

Car * le diametre qui paſſe par le point P milieu de MM, doit auſſi paſſer par le point Q milieu de NN. * *Art.* 145.

COROLLAIRE I.

147. SI l'on mene en même ſorte un autre diametre quelconque Dd ; il eſt clair que la Section conique ſera une parabole * lorſque Dd eſt parallèle à Aa ; une Ellipſe * lorſque Dd rencontre Aa au dedans de la Section ; * & enfin une Hyperbole * ou les Hyperboles oppoſées lorſque les diametres Dd, Aa, ſe rencontrent en un point C hors de la Section ; & que dans ces deux derniers cas le point de rencontre C eſt le centre Cela eſt une ſuite des définitions des diametres de ces trois lignes courbes. * *Déf.* 7. I. * *Def.* 9. II. * *Déf.* 9. III.

Lorſque l'Ellipſe eſt donnée toute entiere, il ſuffit pour avoir le centre de mener un diametre Aa ; car ſa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipſe, il n'y a * qu'à le diviſer par le milieu en C. Il en eſt de même lorſque * les Hyperboles oppoſées ſont données. * *Art.* 50. * *Art.* 96.

COROLLAIRE II.

148. DE-LA il ſuit qu'une Section Conique étant donnée, avec un point O ſur le même plan, on peut toujours mener un diametre Dd qui paſſe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné O une parallèle Dd à un diametre quelconque Aa; & dans l'Ellipſe, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles oppoſées, une ligne droite Dd qui paſſe par le point donné O, & par le centre C que l'on aura trouvé par le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

149. DE-LA il eſt évident qu'une ligne droite MM, ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points M, M; & jamais en davantage. Car ſi l'on mene par le point de milieu P de la ligne MM un diametre Aa, il eſt clair ſelon l'article 144, qu'elle ſera parallèle aux ordonnées à ce diametre; d'où il ſuit ſelon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points M, M.

Si la ligne droite paſſoit par le centre C; on auroit recours à l'article 138, où cela a déjà été démontré.

COROLLAIRE IV.

150. UNE Ellipſe ou une Hyperbole (*fig.* 69,70.) étant donnée; trouver deux de ſes diametres conjugués Aa, Bb; & de plus mener les aſymptotes CG, Cg, lorſque c'eſt une Hyperbole.

Ayant trouvé un diametre Aa par le moyen des deux parallèles MM, NN, & mené par le centre C une parallèle Bb, à ces deux lignes: il eſt clair * que les diametres Aa, Bb, ſeront conjugués; puiſque les lignes MM, NN, étant coupées en deux également par le diametre Aa aux points P, Q, ſeront * ordonnées de part & d'autre à ce diametre.

* *Déf.* 12. II. & 14. III.

* *Art.* 144.

Maintenant pour mener (*fig.* 70.) les aſymptotes CG, Cg; on fera $AP \times Pa. \overline{PM} :: \overline{CA}. \overline{CB}$ ou $\overline{Cb}$. ou (ce qui eſt la même choſe) comme la moyenne proportionnelle entre AP, Pa, eſt à PM, de même CA eſt à CB ou Cb. Et ayant tiré les droites AB, Ab, on leur menera par le centre C les parallèles indéfinies Cg, CG, qui ſeront les aſymptotes cherchées. Car il eſt clair que Bb ſera * la grandeur du ſecond diametre conjugué au premier Aa; & le reſte eſt évident ſelon les définitions 13 & 14 du troiſieme Livre.

* *Art.* 81 & 118.

PROPOSITION IX.

Problême.

151. UNE *Section Conique étant donnée, avec un de ſes diametres* A a; *trouver la poſition des ordonnées* P M *à ce diametre.*

Ayant mené deux parallèles au diametre donné Aa qui en ſoient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points M, M; je dis que la ligne MM qui coupe le diametre donné au point P, eſt ordonnée de part & d'autre à ce diametre, pourvu que le point P ne tombe point ſur le centre.

FIG. 68, 69, 70 & 71.

Car par la conſtruction la ligne MM ſera coupée en deux également par le diametre Aa au point P; & par conſéquent elle ſera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre.

* *Art.* 144.

On peut toujours par cette maniere trouver la poſition d'une ordonnée PM à un diametre donné Aa. Car, 1°. dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig.* 68 & 70.) lorſque le diametre donné Aa eſt un premier diametre; il eſt clair qu'à quelque diſtance qu'on mene de part & d'autre les deux parallèles au diametre Aa, elles rencontreront chacune la Section en un point M; puiſque * la Section s'éloigne toujours de plus en plus à l'infini du diametre Aa. 2°. Dans l'Ellipſe (*fig.* 69.), & dans les Hyperboles oppoſées (*fig.* 71.) lorſque le diametre donné

* *Art.* 10, 20, 84 & 118.

Aa eſt un ſecond diametre : il eſt clair qu'on peut toujours mener deux parallèles de part & d'autre du diametre Aa, qui coupent la Section chacune en un point M, en ſorte que la ligne MM rencontre le diametre donné Aa en un point P autre que le centre ; puiſque dans l'Ellipſe * les ordonnées du diametre Aa vont toujours en diminuant depuis le centre C juſqu'en A, & qu'au contraire dans les Hyperboles oppoſées * elles vont toujours en augmentant à meſure qu'elles s'éloignent du centre C.

* *Art.* 44 & 55.

* *Art.* 84 & 118.

COROLLAIRE I.

152. DE-LA on tire (*fig.* 68, 69, 70.) une nouvelle maniere de mener une tangente par un point donné A ſur une Section Conique donnée. Car * ayant mené par ce point un diametre Aa, & trouvé une double ordonnée MPM à ce diametre ; il eſt clair * que ſi l'on mene par le point A une parallèle à MM, elle ſera tangente en A.

* *Art.* 148.

* *Art.* 10, 20, 44, 55, 84, 118. & *Déf.* 9, I. 12, II. 7, III.

COROLLAIRE II.

153. DE-LA on voit encore comment une Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de leurs diametres quelconques Aa ; on peut trouver le diametre Bb qui lui eſt conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre C une parallèle Bb aux ordonnées à ce diametre.

Ou bien ; ſoit Bb le diametre donné, & qu'il faille trouver ſon conjugué Aa. Ayant tiré MM parallèle à Bb & terminée par la Section, on menera par ſon point de milieu P, & le milieu C de Bb, le diametre cherché Aa.

COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole MAM (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ſes ſeconds diametres Bb de poſition ; en terminer la grandeur, & trouver en même tems la poſition de ſes ordonnées.

On cherchera le premier diametre Aa conjugué au ſecond Bb, par le moyen de la ſeconde maniere du Corollaire précédent ; & ayant fait $AP \times Pa, \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. Il eſt clair * que Bb ſera la grandeur du ſecond diametre Bb, & que ſes ordonnées ſeront parallèles au diametre Aa. * *Art.* 81 & 118.

PROPOSITION X.

Problême.

155. D'UN *point donné* T *hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes* TM, TM, *à cette Section.* FIG. 72, 73 & 74.

POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (*fig.* 72.) par le point donné T * un diametre qui rencontre la Parabole au point A, & pris ſa partie AP égale à AT ; on tirera par le point P * une parallèle aux ordonnées qui rencontrera * la Parabole en deux points M, M ; par leſquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées. * *Art.* 148. * *Art.* 151. * *Art.* 144. * *Art.* 22 & 23.

POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (*fig.* 73.) par le point donné T * le diametre Aa, & pris CP troiſieme proportionnelle à CT, CA ; on menera par le point P, une parallèle aux ordonnées qui rencontrera * l'Ellipſe en deux points M, M ; par leſquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées. * *Art.* 148. * *Art.* 144. * *Art.* 57 & 58.

POUR L'HYPERBOLE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

Ayant mené (*fig.* 74.) par le point donné T, * le diametre Aa, dont on déterminera la grandeur * s'il eſt un ſecond diametre ; on prendra CP troiſieme proportion- * *Art.* 148. * *Art.* 154.

nelle à CT, CA (du même côté du point donné T, par rapport au centre, lorſque ce point tombe dans l'un des angles faits par les aſymptotes; & du côté oppoſé, lorſqu'il tombe dans l'un des angles à côté): & l'on menera par le point P une parallèle aux ordonnées qui rencontrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées en deux points M, M; par leſquels & par le point donné T, on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées.

* *Art.* 144.

* *Art.* 121.

Si le point donné tomboit ſur le centre C, les deux tangentes ſeroient alors * les aſymptotes CG, Cg; & on les tireroit comme l'on a enſeigné dans l'article 150. Et enfin ſi le point donné tomboit ſur une aſymptote comme en S, on tireroit par le point H milieu de CS, une parallèle HM à l'autre aſymptote CG, laquelle rencontreroit * l'Hyperbole en un point M, par où & par le point donné S, on tireroit une droite SM qui ſeroit * une des tangentes cherchées; & l'autre ſeroit l'aſymptote même Cg ſur laquelle ſe trouve le point donné S.

* *Art.* 108.

* *Art.* 104.

* *Art.* 107.

COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne MPM parallèle aux ordonnées rencontre toujours * la Section en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage; il s'enſuit qu'on ne peut mener d'un point donné T hors une Section Conique que les deux tangentes TM, TM. D'où il eſt évident que le diametre qui paſſe par le point de rencontre T de deux tangentes, coupe par le milieu en P la ligne MM qui joint les points touchans; & réciproquement que le diametre qui coupe par le milieu en P une ligne droite MM qui joint les points touchans de deux tangentes MT, MT, paſſe par leur point de rencontre T.

* *Art.* 144.

COROLLAIRE II.

COROLLAIRE II.

157. TOUTES les tangentes de la Parabole (*fig.* 72.) ſe rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il eſt néceſſaire Car ſi l'on joint deux points touchans quelconques M, M, par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en P, on prenne ſur le diametre qui paſſe par ce point, & qui rencontre la Parabole en A, la partie AT égale à AP; il eſt clair que les deux tangentes MT, MT, qui paſſent par les points M, M, ſe rencontreront en ce point T.

COROLLAIRE III.

158. IL eſt encore évident (*fig.* 74.) que toutes les tangentes d'une Hyperbole ſe rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il eſt néceſſaire; & toujours au dedans de l'angle fait par les aſymptotes. Car ſi l'on joint deux points touchans quelconques M, M, par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en P, on prenne ſur le diametre qui paſſe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en A, la partie CT troiſieme proportionnelle à CP, CA; il eſt clair que les deux tangentes MT, MT, ſe rencontreront en ce point T, lequel ſera toujours * au dedans de l'angle fait par les aſymptotes, puiſque le demi-diametre CA tombe au dedans de cet angle. * *Art.* 103.

COROLLAIRE IV.

159. TOUTES les tangentes d'une Ellipſe ou des Hyperboles oppoſées (*fig.* 73, 74.) ſe rencontrent deux à deux, lorſque la ligne qui joint les deux points touchans ne paſſe point par le centre: ſçavoir, celles de l'Ellipſe du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles oppoſées de l'autre côté. Cela ſe prouve par le moyen de la Propoſition ci-deſſus,

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

PROPOSITION XI.

Problême.

160. UNE *Section Conique étant donnée, en trouver un diametre qui faſſe de part ou d'autre avec ſes ordonnées des angles egaux à un angle donné.*

POUR LA PARABOLE.

* *Art.* 146. Fig. 75 & 76. Ayant trouvé * un de ſes diametres AP, on menera par ſon origine A, la ligne AN, qui faſſe avec AP de part ou d'autre l'angle PAN égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point N. Ayant diviſé AN par le milieu en O, & tiré OM parallèle à AP; je dis que la ligne MO eſt le diametre qu'on cherche.

Car, 1°. Tous les diametres d'une Parabole devant être parallèles entr'eux, ſelon la définition ſeptieme du premier Livre, il s'enſuit que MO ſera un diametre; puiſque AP en eſt un.

2°. La ligne AN terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diametre MO, elle lui ſera * ordonnée de part & d'autre.

* *Art.* 144.

3°. A cauſe des parallèles MO, AP, l'angle MOA que fait le diametre MO avec ſon ordonnée OA, ſera égal à l'angle PAN qui a été fait égal à l'angle donné. Donc, &c.

Si l'angle donné eſt droit, il eſt manifeſte que le diametre MO qu'on trouvera par cette méthode ſera * l'axe de Parabole.

* *Art.* 23.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

* *Art.* 146. Fig. 77, 78, 79, 80. Ayant trouvé * un de leurs diametres Aa, & décrit ſur ce diametre de part ou d'autre un arc de cercle ANa capable de l'angle donné ou de ſon complement à deux droits; on menera du point N où il rencontre la Sec-

tion, aux deux extrêmités A, a, du diametre Aa, les lignes NA, Na; par les milieux desquelles O, Q, & par le centre C, on tirera deux diametres Mm, Ss. Je dis que chacun de ses diametres sera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne AN terminée par la Section, étant coupée en deux également au point O par le diametre Mm, elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. Or le diametre Mm est parallèle à la ligne Na, puisqu'il divise par le milieu aux points C, O, les lignes Aa, AN; & partant l'angle mOA que fait le diametre Mm avec son ordonnée AO, sera égal à l'angle aNA, qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. On prouvera de même que le diametre Ss fait avec son ordonnée QN un angle égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. Donc, &c. * *Art.* 144.

Il est visible 1°. Que le diametre Ss est * conjugué au diametre Mm; puisqu'il est parallèle à son ordonnée ON. 2°. Que les diametres conjugués Mm, Ss, deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. * *Déf.* 12, II. & 14, III. * *Art.* 58 & 128.

PROPOSITION XII.

Problême.

161. *Un diametre d'une Section Conique étant donné, avec son parametre, & la position de ses ordonnees, & sçachant de plus si c'est un premier ou second diametre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une méthode uniforme pour toutes les trois.*

PREMIERE MANIERE.

Pour la Parabole. Ayant trouvé * l'axe AP, son origine A, & son parametre AG que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point G une ligne droite indéfinie DD perpendiculaire à PG. * *Art.* 27. FIG. 81.

On fera mouvoir enſuite une ligne droite indéfinie DM le long de GD toujours parallèlement à AG, en entraînant par ſon extrêmité D le côté DA de l'angle droit DAM, mobile ſur ſon ſommet A autour de l'origine A de l'axe AP. Je dis que l'interſection continuelle M de la ligne DM & du côté AM, décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant MP perpendiculaire à l'axe, les triangles rectangles AGD, MPA, ſeront ſemblables; puiſque chacun des angles GAD, PMA, étant joint à l'angle PAM, vaut un droit. On aura donc $AG.GD$ ou $PM :: PM.AP$. D'où il ſuit que $\overline{PM} = GA \times AP$; & qu'ainſi PM eſt une * ordonnée à l'axe AP.

* *Art.* 7.

On a déjà donné cette conſtruction dans le Livre premier, article 29, d'une maniere qui convient à tous les diametres : on ne la répéte ici, & on ne la reſtraint à l'axe, que pour en faire voir la liaiſon & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Sections.

Pour les autres Sections. Ayant trouvé entre le diametre donné & ſon parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en ſorte qu'elle ſoit parallèle aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il eſt clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen deſquels on cherchera * les deux axes, & enſuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipſe, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

* *Déf.* 13, II. & 15, III.
* *Art.* 64 & 128.

Fig. 82 & 83. On prolongera dans l'Ellipſe, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe Aa en G; en ſorte que aG ſoit à GA, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Ayant tiré par le point G une perpendiculaire indéfinie DD à l'axe Aa, on fera mouvoir le point D le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite Da mobile autour de l'extrêmité a de l'axe Aa, & le côté DA de l'angle droit DAM mobile ſur ſon ſommet A autour de l'autre extrêmité A de l'axe Aa. Je dis que l'interſection

continuelle M des lignes AM, aD, décrira dans ce mouvement la Section requiſe.

Car menant MP perpendiculaire ſur l'axe Aa, les triangles ſemblables aPM, aGD, donnent $aP.PM :: aG.GD$. Or les triangles rectangles AGD, MPA, ſont ſemblables ; puiſque chacun des angles GAD, PMA, étant joint à l'angle PAM, vaut un droit ; & partant $AP.PM :: GD.GA$. Si donc l'on multiplie les Antecédens & les Conſéquens des deux premieres raiſons, par ceux de ces deux dernieres ; on aura $aP \times PA.\overline{PM}^2 :: aG \times GD.GD \times GA :: aG.GA$, c'eſt-à-dire, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc, * &c.

* *Art.* 41 & 81.

Il eſt à remarquer que plus le point D s'éloigne du point G ſur la ligne DD ; plus l'angle PaM augmente, & plus au contraire l'angle PAM diminue ; de ſorte que les lignes aM, AM, deviennent parallèles dans l'Hyperbole, & ſe coupent enſuite de l'autre côté de la ligne DD, où elles décrivent par leur interſection continuelle l'Hyperbole oppoſée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole, que le point a s'éloigne à l'infini du point A, ou (ce qui eſt la même choſe) que l'axe Aa devienne infiniment grand ; les lignes GA, Da, qui ne ſe rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme parallèles : ainſi cette derniere conſtruction retombe dans le cas de la précédente. C'eſt pourquoi l'Ellipſe ou l'Hyperbole deviendroit alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne AG ; & par conſéquent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipſe ou une Hyperbole dont l'axe eſt infini : ſçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipſe.

SECONDE MANIERE.

Pour la Parabole. Soit un triangle iſoſcelle HAL, dont l'un des côtés AH ſoit ſitué ſur le diametre donné AP prolongé indéfiniment de part & d'autre de ſon FIG. 84.

origine A, & l'autre côté AL ſur la tangente indéfinie LAL qui paſſe par le point A. Soit conçue ſa baſe HL ſe mouvoir toujours parallèlement à elle-même en entraînant par l'une de ſes extrêmités L la ligne indéfinie LM parallèle à AP, & par l'autre extrêmité H la ligne HF parallèle à AL & égale au parametre donné du diametre AP, laquelle entraîne auſſi par ſon extrêmité F la droite FA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des deux droites FA, LM, décrit pendant que la ligne HL ſe meut dans l'angle HAL & ſon oppoſé ou ſommet, la Parabole MAM qu'on demande.

Car menant l'ordonnée MP au diametre AP, les triangles ſemblables AHF, APM, donnent AH ou AL ou $PM.\ HF :: AP.\ PM$, & partant $\overline{PM}^{2} = AP \times HF$. Donc, * &c.

* *Art.* 7 & 20.

On doit obſerver que le point H doit tomber au-delà de l'origine A du diametre AP; lorſque les points F, L, tombent de part & d'autre de ce diametre.

FIG. 85, 86. *Pour les autres Sections.* La conſtruction eſt la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne LM doit tourner autour de l'autre extrêmité a du diametre donné Aa; au lieu que dans la Parabole elle lui eſt parallèle. On ſuppoſe dans l'Hyperbole que le diametre donné eſt un premier diametre; car ſi c'étoit un ſecond, on trouveroit ſelon l'article 115 du Livre troiſieme, le premier qui lui eſt conjugué & ſon parametre.

Car menant MP ordonnée au diametre Aa, les triangles ſemblables aPM, aAL, & APM, AHF, donnent $aP.\ PM :: aA.\ AL$ ou AH. Et $AP.\ PM :: AH.\ HF$. Et partant, ſi l'on multiplie les Antecédens & les Conſéquens des deux premieres raiſons par ceux des deux ſecondes, on aura $aP \times PA.\ \overline{PM}^{2} :: aA \times AH.\ AH \times HF :: aA.\ HF$. Donc, * &c.

* *Art.* 41, 55, 81 & 118.

Il faut obſerver que les points H, a, doivent tomber de part & d'autre du point A dans l'Ellipſe, & du même

côté dans l'Hyperbole, lorſque les points F, L, tombent de part & d'autre du diametre Aa.

COROLLAIRE I.

162. DE-LA on voit comment un diametre Aa étant donné avec une de ſes ordonnées PM; on peut trouver ſon parametre HF. Car 1°. Dans la Parabole on prendra ſur le diametre AP la partie AH égale à PM; & ayant tiré la ligne HF parallèle à PM, & terminée en F par la ligne AM tirée de l'origine A du diametre par l'extrêmité M de l'ordonnée, il eſt clair que cette ligne HF ſera le parametre du diametre AP. FIG. 84.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extrêmités a du diametre donné Aa la ligne aM qui rencontre la tangente AL, qui paſſe par l'autre extrêmité A, au point L; & ayant pris ſur le diametre Aa la partie AH égale à AL, on tirera HF parallèle à PM, laquelle rencontrant en F la ligne AM, ſera le parametre du diametre Aa. FIG. 85 & 86.

COROLLAIRE II.

163. ON tire de la ſeconde maniere qu'on vient d'expliquer, une méthode uniforme & très-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par pluſieurs points. La voici dans l'Ellipſe: & elle ſervira de Regle pour les autres Sections.

Ayant pris ſur la tangente AL, qui paſſe par l'une des extrêmités A du diametre donné Aa, la partie AG égale à ſon parametre, & mené une parallèle indéfinie GF à Aa; on tirera librement par le point A autant de lignes droites AF, AF, &c. qu'on voudra. Ayant pris ſur la tangente indéfinie AL, les parties AL, AL, &c. égales aux correſpondantes GF, GF, &c. & mené les droites aL, aL, &c; je dis que les interſections M, M, &c. des droites correſpondantes FA, La, FA, La, &c. ſeront des points de l'Ellipſe qui a pour diametre la ligne Aa, pour tangente la ligne AL, & pour parametre du FIG. 87.

diametre Aa la ligne AG. Cela eſt viſible en menant FH parallèle à AG, & tirant la ligne HL par le point L correſpondant au point F. Car le triangle HAL ſera iſoſcelle; puiſque * AL eſt égale à GF ou AH, & HF ſera égale au parametre du diametre Aa: c'eſt pourquoi cette conſtruction retombe dans celle de la ſeconde des deux manieres précédentes.

* *Hyp.*

Comme les lignes GF, AL, deviennent fort grandes, lorſqu'il s'agit de trouver des points M qui ſoient proches du point a; on pourra ſe ſervir, pour trouver ces points, de la tangente al qui paſſe par l'autre extrêmité a du diametre Aa, & de la ligne gf parallèle à Aa, comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées MP, MP, &c. parallèles à la tangente AL, & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre Aa en M, M, &c. enſorte qu'elles ſoient coupées chacune en deux également par ce diametre; il eſt clair * que ces nouveaux points M, M, &c. ſeront encore à la même Ellipſe.

* *Art.* 43.

On pourroit ſe ſervir d'une même ouverture de compas GF ou AL pour marquer ſur les lignes GF, AL, autant de points F, F; &c. L, L, &c. qu'on voudra; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque GF ſeroit égale à la correſpondante AL; ce qui eſt le fondement de la démonſtration.

PROPOSITION XIII.

Théorême.

Fig. 88, 89, 90, 91.

164. S'IL *y a deux droites* MN, AR, *terminées par une Section Conique, leſquelles ſe rencontrent en un point* P, *& qui ſoient parallèles à deux droites données de poſition; je dis que le rectangle* MP × PN *ſera toujours au rectangle* AP × PR *en raiſon donnée, en quelque endroit de la Section que puiſſent tomber les droites* MN, AR.

POUR

POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig.* 88.) les tangentes CB, EB, qui se rencontrent au point B, parallèles aux droites MN, AR: je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{CB}^2 . \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point G milieu de MN le diametre CG, & tiré par son origine C la parallèle CB à MN; il est clair * qu'elle sera tangente en C. On menera de la même sorte la tangente EB parallèle à AR, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre CG au point K; & tirant par le point touchant E l'ordonnée EL, on aura * $KC = CL$; & par conséquent $KB = BE$. On tirera ensuite AD ordonnée, & AF parallèle au diametre CG, & on nommera les données KB ou BE, m; BC, n; CK, e; le parametre CH du diametre CG, p; & les indéterminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

* *Art.* 148.

* *Art.* 10 & 21.

* *Art.* 22 & 23.

Cela posé, les triangles semblables KBC, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$: & par conséquent $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} + r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r$; $MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m} y + 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m} y + 2ry + \frac{nn}{mm} xx + \frac{2nr}{m} x + rr$. Or * $CD\,(s) . CG\left(\frac{ex}{m} + s\right) :: \overline{AD}^2\,(rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{err}{ms} x = rr + \frac{ep}{m} x$, puisque $\overline{AD}^2\,(rr) = CD \times CH\,(ps)$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m} y + 2ry + \frac{nn}{mm} xx + \frac{2nr}{m} x - \frac{ep}{m} x = o$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne AR tombe au-dessus du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

* *Art.* 8 & 20.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = o$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx+\frac{2nr}{m}x-\frac{ep}{m}x=o$. D'où l'on tire $x=\frac{emp}{nn}-\frac{2mr}{n}=AR$; puiſque $PM\,(y)$ devenant nulle ou zéro, il eſt clair que $AP\,(x)$ devient AR. Donc $AP\times PR=\frac{emp}{nn}x-\frac{2mr}{n}x-xx$; & par conſéquent $MP\times PN\,(yy+\frac{2nx}{m}y+2ry)$. $AP\times PR\left(\frac{emp}{nn}x-\frac{2mr}{n}x-xx\right)::\overline{CB}^{2}\,(nn).\,\overline{EB}^{2}\,(mm)$. puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on retrouve l'équation précédente. Or comme les tangentes CB, BE, demeurent toujours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que tombent leurs parallèles MN, AR; il s'enſuit, &c.

Il peut arriver différens cas, ſelon les différentes poſitions des droites MN, AR; mais comme la démonſtration demeure toujours la même, & qu'il ne peut y avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans quelques termes qui s'évanouiſſent, je ne m'arrêterai point à les expliquer en détail. On doit obſerver la même choſe dans les deux autres Sections.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89, 90, 91.) les deux demi-diametres CO, CB, parallèles aux droites MN, AR; je dis que $MP\times PN.\,AP\times PR::\overline{CO}^{2}.\,\overline{CB}^{2}$.

Soit mené le diametre CG qui ait pour double ordonnée MN, ſur lequel ſoient abaiſſées les droites BE, AD, parallèles à MN; & ayant tiré AF parallèle à CG, ſoient nommées les données CB, m; BE, n; CE, e; & le demi-diametre CK, t; ſon demi-conjugué CO, c; & les interminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

Cela poſé, les triangles ſemblables CBE, APF, donneront $PF=\frac{nx}{m}$, AF ou $DG=\frac{ex}{m}$. Par conſéquent dans l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 90 & 91.) on aura $CG=\frac{ex}{m}\pm s$, GM ou $GN=y+\frac{nx}{m}-r$, PN ou $GN+GP=y+\frac{2nx}{m}-2r$; $MP\times PN$

$= yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2mx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{mm}xx$ $- \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $\overline{CD}^2 \mp \overline{CK}^2$ $(ss \mp tt)$. $\overline{CG}^2 \mp \overline{CK}^2$ $\left(\frac{eexx}{mm} \mp \frac{2esx}{m} + ss \mp tt\right)$ :: $\overline{AD}^2$ (rr). $\overline{GM}^2 = rr$ $+ \frac{eerrxx \mp 2emrrsx}{mmss + mmtt} = rr + \frac{eeccxx \mp 2eccmsx}{mmtt}$, en mettant pour $\frac{rr}{ss+tt}$ sa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{x}{m}y$ $- 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2ccms}{mtt}x = o$, dans laquelle mettant à la place de $nntt - ccee$ sa valeur $cctt$ (il faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe * par l'extrêmité B, lorsque CB est la moitié d'un second diametre) tirée de ce que * $\overline{CE}^2 + \overline{CK}^2$ $(ee + tt)$. $\overline{EB}^2$ (nn) :: $\overline{CK}^2$ (tt). $\overline{CO}^2$ (cc). on aura celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$ $+ \frac{cc}{mm}xx - \frac{2nrtt \mp 2ccms}{mtt}x = o$, qui convient à tous les points de la Section, lorsque les points A, R, tombent de part & d'autre du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

* *Art.* 82 & 118.

* *Art.* 82 & 118.

* *Art.* 134.

* *Art.* 82 & 118.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = o$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre) $\frac{cc}{mm}xx$ $- \frac{2nrtt \mp 2ccms}{mtt}x = o$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnrtt \mp 2ccems}{cctt}$ $= AR$; puisque PM (y) devenant nulle ou zéro, il est clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR$ $\left(\frac{2mnrtt \mp 2mccms}{cctt}x - xx\right)$. $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry)$ :: $\overline{CB}^2$ (mm). $\overline{CO}^2$ (cc). Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres CO, CB, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent leurs parallèles MN, AR; il s'ensuit, &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipse, parce qu'il ne differe de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes.

COROLLAIRE I.

FIG. 92. 165. S'IL y a deux lignes droites MN, AR, terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'on mene par-tout où l'on voudra deux autres droites FG, BD, parallèles aux deux premieres, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point Q: il est clair que $MP \times PN$. $AP \times PR :: FQ \times QG$. $BQ \times QD$. Car les deux droites AR, BD, étant parallèles entr'elles, seront parallèles à la même droite CZ donnée de position; comme aussi les deux droites MN, FG, à la même droite CY donnée pareillement de position.

COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux parallèles AR, BD, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points E, Q, une ligne droite FG terminée par la même Section; je dis que $FE \times EG$. $AE \times ER :: FQ \times QG$. $BQ \times QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que MN tombe sur FG, il est clair que les rectangles $MP \times PN$, $AP \times PR$, deviennent $FE \times EG$, $AE \times ER$.

COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93. 167 ON peut tirer de ce Théorême la propriété du cercle, qui est si connue de tous les Géometres; sçavoir que si par un point quelconque P pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra AR, MN, HL, &c. terminées par la circonférence, les rectangles $AP \times PR$, $MP \times PN$, $HP \times PL$, &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres CB, CO, CD, &c. parallèles à ces lignes, il est clair par le Théorême, que tous ces rectangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la propriété essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques A de la Parabole un diametre AF qui rencontre cette ligne au point F: je dis que le rectangle $MF \times FN$ eſt égal au rectangle de AF par le parametre CH du diametre CG, qui paſſe par le milieu de MN. FIG. 94.

Car concevant dans le Théorême que AP tombe ſur AF, il eſt clair que la ligne $PF\left(\frac{n}{m}x\right)$ devient nulle ou zéro, & qu'ainſi $\frac{n}{m}=o$. C'eſt pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy+\frac{2nx}{m}y+2ry+\frac{nn}{mm}xx+\frac{2nr}{m}x-\frac{ep}{m}x=o$, tous les termes où $\frac{n}{m}$ ſe rencontre, on en formera celle-ci $yy+2ry-\frac{ep}{m}x=o$. Or $AF=\frac{ex}{m}$, $CH=p$, & $MF\times FN=yy+2ry$. Donc, &c.

Ce n'eſt que pour faire voir la généralité du Théorême, que j'en déduis cette propriété; car on la peut démontrer plus aiſément ſans y avoir recours, en cette ſorte. $\overline{GM}=GC\times CH$, $\overline{AD}$ ou $\overline{GF}=DC\times CH$, & partant $\overline{GM}-\overline{GF}$ ou $MF\times FN=\overline{GC-DC}\times CH=AF\times CH$.

COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LA il eſt évident,

1°. Que s'il y a deux droites MN, EL, terminées par une Parabole, & parallèles entr'elles; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de cette Parabole, deux diametres AF, BP, qui rencontrent ces lignes aux points F, P: il eſt évident, dis-je, que $MF\times FN.\ EP\times PL::AF.\ BP$. Car le diametre CG qui paſſe par le milieu de MN, paſſe auſſi par le milieu

de EL; & par conſéquent le rectangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ſes diametres AF, BK, aux points F, K; on aura $MF \times FN$. $MK \times KN :: AF$. BK.

3°. Que s'il y a deux lignes droites MN, EL, terminées par une Parabole, & parallèles entr'elles, qui rencontrent un de ſes diametres quelconques BP aux points K, P; on aura $MK \times KN$. $EP \times PL :: BK$. BP.

COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui paſſe par trois points donnés A, M, N, & dont les diametres AF, CG, ſoient parallèles à une ligne droite donnée de poſition; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.

Car ayant mené une ligne MN qui joigne deux des points données M, N; on tirera par le troiſieme A un diametre AF parallèle à la ligne donnée de poſition, & qui rencontre la ligne MN au point F, & par le point de milieu G de MN une parallèle GC à AF. On fera enſuite $MF \times FN$. $MG \times GN$. ou $\overline{GM}^2 :: AF$. GC. Et ayant pris CH troiſieme proportionnelle à CG, GM, on décrira * du parametre CH, & du diametre CG dont l'origine eſt en C, une Parabole dont les ordonnées ſoient parallèles à MN; elle ſatisfera à la queſtion.

* *Art.* 29 & 30.

* *Art.* 17 & 20.

Car 1°. Elle paſſera * par les points M, N; puiſque par la conſtruction $CH \times CG = \overline{GM}^2$ ou $\overline{GN}^2$. 2°. Elle paſſera par le point A; puiſque $MG \times GN$. $MF \times FN :: CG$. FA. 3°. Les diametres AF, CG, ſeront parallèles à la droite donnée de poſition.

Comme la Parabole qui ſatisfait au Problême, a néceſſairement pour diametre la ligne CG, qui a pour origine le point C, & pour parametre la ligne déterminée CH; il s'enſuit qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.

Digitized by Google

COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. S'IL y a deux droites AR, MN, terminées par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'ayant fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$. on tire la ligne AF: je dis que cette ligne sera un diametre. Car ayant mené les tangentes CB, EB, parallèles aux droites MN, AR, & par le point touchant C le diametre CG qui rencontre EB prolongée en K; on aura $\overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$, & par conséquent $KB. CB :: AP. PF$. Les triangles KBC, APF, seront donc semblables, & leurs côtés AF, KC, parallèles entr'eux : d'où il suit que la ligne AF qui se trouve ainsi parallèle au diametre CG, sera un diametre ; puisque dans la Parabole * tous les diametres sont parallèles entr'eux. FIG. 88. * *Déf.* 7. I.

COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

172. ON tire du Corollaire précédent une maniere de décrire une Parabole qui passe par quatre points donnés A, M, R, N.

Car ayant joint ces quatre points par deux droites AR, MN, qui s'entrecoupent en un point P, & fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$; on tirera la ligne AF, & on décrira * une Parabole qui passe par les trois points A, M, N, & dont les diametres soient parallèles à la ligne AF. Elle sera celle qu'on demande ; car selon le Théorême la ligne AP doit rencontrer cette Parabole en un point R, tel que $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$. * *Art.* 170.

Si l'on eut pris le point F de l'autre côté du point P, on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorsqu'un de ces points F tombe sur l'un des FIG. 95.

points donnés M ou N, il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse ; & que lorsque tous les deux tombent sur les points M, N, il n'y en peut avoir aucune : puisqu'alors le diametre AF de la Parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré * être impossible.

* *Art.* 101.

COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

FIG. 96, 97. 173. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote CB au point Q, & qui soit parallèle à une ligne donnée de position ; & qu'on tire par un point quelconque A de la Section une droite AP parallèle à cette asymptote, & qui rencontre au point P la ligne MN : je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toujours au rectangle $2AP \times PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP.

Car concevant dans le Théorême (*fig.* 90, 91.) que le demi-diametre CB devienne une asymptote, il est clair * qu'alors les trois côtés du triangle CBE deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (*fig.* 96, 97.) par l'extrêmité K du diametre LK qui passe par le milieu de MN, une parallèle KS à MN, qui rencontre l'asymptote CB en S, on formera un triangle CKS dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle CBE ; & partant on aura $CK(t).KS$ ou * $CO(c) :: CE(e).EB(n)$. Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on met à la place de ce sa valeur nt dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt-ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2ects}{mtt}x = o$ que l'on a trouvée dans le Théorême, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt \mp 2ncs}{mt}x = o$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt \mp 2ncs}{mt}x$. Or en prolongeant AD, s'il est nécessaire,

* *Art.* 102.

* *Art.* 113.

ſſaire, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote CB en H, les triangles ſemblables CKS, CDH, donneront $CK(t).\ KS(c) :: CD(s).\ DH = \frac{cs}{t}$. Et partant AH ou $PQ = \frac{rt \pm cs}{t}$. On aura donc $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry).\ 2\,AP \times PQ\left(\frac{2rt \pm 2cs}{t}x\right) :: EB(n).$ $CB(m) :: KS.CS$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes KS, CS, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP; parce que le diametre LK qui paſſe par le milieu de MN, paſſe auſſi * par le milieu de toutes les parallèles à MN terminées par la Section, en quelque endroit qu'elles ſe rencontrent. Donc, &c. * *Art.* 143.

On peut démontrer ce Corollaire immédiatement, & ſans avoir recours au Théorême, en cette ſorte. Soient les données $CK = t$, KS ou $CO = c$, $CS = m$, & les indéterminées $CD = s$, AD ou $Dl = r$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles ſemblables CSK, APF, donnent $PF = \frac{tx}{m}$, AF ou $DG = \frac{tx}{m}$; & partant GM ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{tx}{m} + s$. Or à cauſe des triangles ſemblables CKS, CDH, CGQ, on aura $CK(t).$ $KS(c) :: CD(s).\ DH = \frac{cs}{t} :: CG\left(\frac{tx}{m} + s\right).\ GQ$ $= \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \times QN$ ou $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2$ $= \frac{2ccsx}{mt} + \frac{ccss}{tt} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2crx}{m} - rr = {}^*AH \times HI$ ou $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{ccss}{tt} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{ccss}{tt} - rr$, & tranſpoſant d'une part tous les termes où y ſe rencontre) cette équation $yy + \frac{2cxy}{m}$ $- 2ry = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{2crx}{m}$, laquelle étant réduite en proportion, donne $MP \times PN(yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry).\ 2\,AP \times PQ$ * *Art.* 97.

$\left(\frac{2csx}{t} + 2rx\right) :: KS(c). CS(m)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La démonſtration eſt la même pour les Hyperboles oppoſées à quelques ſignes près.

COROLLAIRE X.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

FIG. 98. 174. IL ſuit du Corollaire précédent,

1°. Que s'il y a deux droites parallèles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section deux parallèles AP, BD, à l'aſymptote CS qui rencontrent ces lignes aux points P, D: les rectangles $MP \times PN$, $2AP \times PQ$ ſeront entr'eux, comme les rectangles $HD \times DG$, $2BD \times DI$; & partant on aura $MP \times PN. HD \times DG :: AP \times PQ. BD \times DI$.

2°. Que s'il y a deux droites parallèles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par un point quelconque A de la Section, une parallèle AO à CS, qui rencontre ces lignes aux points P, O: on aura (en concevant dans le cas précédent que BD tombe ſur AP) cette proportion, $MP \times PN. HO \times OG :: AP \times PQ : AO \times OI :: AP. AO$. puiſque $PQ = OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite HG terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontre une aſymptote CS en I; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section A, B, deux parallèles AO, BD, à CS, qui rencontrent cette ligne aux points O, D: on aura $HO \times OG. HD \times DG :: AO \times OI. BD \times DI$. Cela eſt encore une ſuite du premier cas, en concevant que la ligne MN tombe ſur HG.

COROLLAIRE XI.

175. SI l'on conçoit qu'une ligne droite BD qui rencontre une Section Conique en deux points B, D, ſe meuve parallèlement à elle-même juſqu'à ce qu'elle raſe la Section, c'eſt-à-dire, juſqu'à ce qu'elle devienne la tangente LS : il eſt clair que les deux points d'interſection B, D, ſe réuniſſent alors au point touchant L; & qu'ainſi on peut conſidérer un point touchant comme deux points d'interſection qui tombent l'un ſur l'autre. Or cela poſé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, pluſieurs cas, dont voici les principaux. FIG. 91.

1°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui ſe rencontrent en un point S, & deux autres droites MN, AR, parallèles à ces tangentes & terminées par la Section, leſquelles ſe rencontrent en un point P; je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Ceci a été démontré dans le Théorême à l'égard de la Parabole : mais pour les autres Sections, concevant dans le premier Corollaire que FG tombe ſur la tangente KS, & BD ſur LS; il eſt clair que les deux points d'interſection F, G, ſe réuniſſent au point touchant K, comme auſſi les deux B, D, au point touchant L; & qu'ainſi les rectangles $FQ \times QG$, $BQ \times QD$, deviennent les quarrés $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$.

2°. Si dans une Ellipſe ou dans des Hyperboles oppoſées, l'on mene une tangente TX parallèle à KS, & qui rencontre SL au point X, on prouvera comme dans le nombre précédent, que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. D'où il ſuit que $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2 :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. Et $KS . SL :: TX . LX$. C'eſt-à-dire, que ſi deux tangentes parallèles KS, TX, rencontrent une troiſieme tangente LS aux points S, X, on aura $KS . LS :: TX . LX$. ou $KS . TX :: LS . LX$.

3°. Si dans une Ellipſe, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles oppoſées, il y a deux tangentes KS, LS, qui ſe rencontrent en un point S, & qu'on mene

deux demi-diametres CY, CZ, parallèles à ces tangentes ; je dis qu'elles ſeront entr'elles comme ces deux demi-diametres. Car ſelon le Théorême $\overline{CY}.\ \overline{CZ} :: MP \times PN.\ AP \times PR :: \overline{KS}.\ \overline{LS}$, ſelon le nombre premier. Et par conſéquent $CY.\ CZ :: KS.\ LS$.

4°. S'il y a deux droites AR, FG, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent deux tangentes KI, LO, qui leur ſoient parallèles aux points I, O ; je dis que $FO \times OG.\ \overline{LO} :: \overline{KI}.\ AI \times IR$. Ce qui eſt évident en concevant dans le premier Corollaire que BD devient la tangente LO ; & MN, la tangente KI.

5°. S'il y a deux parallèles AR, BD, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent une tangente KH aux points I, H ; je dis que $\overline{KI}.\ AI \times IR :: \overline{KH}.\ BH \times HD$, ou $\overline{KI}.\ \overline{KH} :: AI \times IR.\ BH \times HD$. Ce qui eſt une ſuite du ſecond Corollaire, en concevant que la ligne FG tombe ſur la tangente KH.

6°. Si l'on ſuppoſe dans le nombre précédent que la Section Conique ſoit une Hyperbole, & que la tangente HK en ſoit une aſymptote ; les rectangles $BH \times HD$, $AI \times IR$ deviendront égaux entr'eux. Car le point touchant K ſera * alors infiniment éloigné des points H, I ; & par conſéquent les droites infinies HK, IK, qui ne different entr'elles que d'une grandeur finie HI, doivent être regardées comme égales. Ceci a déjà été démontré dans l'article 97, & on ne le répete ici que pour ſervir de preuve à ce que l'on vient de dire, & pour faire voir qu'on arrive ſouvent aux mêmes vérités par des routes bien différentes.

* *Art.* 108.

7°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui ſe rencontrent en un point S, avec une ligne droite AR terminée par la Section, parallèle à l'une d'elles LS, & qui rencontre l'autre KS en un point I ; je dis que $\overline{KI}.\ AI \times IR :: \overline{KS}.\ \overline{LS}$. Cela eſt viſible en concevant dans le ſecond Corollaire que les lignes FG, BD, tombent ſur les tangentes KS, LS.

8°. S'il y a dans une Ellipſe ou dans les Hyperboles oppoſées deux tangentes parallèles KI, TV, qui rencontrent aux points I, V, une ligne AR terminée par la Section aux points R, A; je dis que $\overline{KI}.AI\times IR :: \overline{TV}.RV\times VA$. Cela ſuit encore du ſecond Corollaire en imaginant que les parallèles MN, FG, tombent ſur les tangentes TV, KI.

9°. S'il y a dans une Parabole deux parallèles MN, CH, dont l'une ſoit tangente en C, & l'autre ſoit terminée par la Parabole; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux diametres AF, BO qui rencontrent ces lignes aux points F, O: il eſt clair en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire ſixieme que EL tombe ſur la tangente CH; 1°. Que $MF\times FN.\overline{CO} :: AF.BO$. 2°. Que ſi l'on prolonge FA juſqu'à ce qu'elle rencontre la tangente CH en Q, on aura $MF\times FN.\overline{CQ} :: AF.AQ$. FIG. 94.

10°. S'il y a deux parallèles MN, KT, dont l'une KT touche une Hyperbole en K & rencontre une de ſes aſymptotes en S, & l'autre MN eſt terminée par l'une ou par l'autre des Hyperboles oppoſées, & rencontre la même aſymptote en Q; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux parallèles AP, BT, à l'aſymptote CS, leſquelles rencontrent ces lignes aux points P, T; on aura (en concevant dans les trois nombres du Corollaire dixieme, que la ſécante GH tombe ſur la tangente RT) 1°. Le rectangle $MP\times PN.\overline{KT} :: AP\times PQ.BT\times TS$. 2°. En prolongeant PA juſqu'à ce qu'elle rencontre KT en R, le rectangle $MP\times PN.\overline{KR} :: AP.AR$. 3°. Le quarré $\overline{KT}.\overline{KR} :: BT\times TS.AR\times RS$. FIG. 98.

11°. S'il y a dans les Hyperboles oppoſées deux tangentes parallèles KR, LF, qui rencontrent une aſymptote CS aux points S, V; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux parallèles AR, BF à l'aſymptote CS leſquelles rencontrent ces tangentes

aux points R, F : on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixieme, que les deux Sécantes MN, GH, tombent ſur les deux tangentes KR, LF) 1°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LF}^2 :: AR \times RS . BF \times FV$. 2°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LE}^2 :: AR . AE$.

PROPOSITION XIV.

Problême.

Fig. 99, 100 & 101.

176. DÉCRIRE *une Ellipſe ou deux Hyperboles oppoſées autour d'un parallelogramme donné* FGHK, *& dont l'un de ſes diametres* AB *parallele aux deux côtés* FK, GH, *ſoit à ſon conjugué* DE, *en la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant mené les lignes AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés oppoſés du parallélogramme donné $FGHK$, il eſt clair * qu'elles ſeront ſur deux diametres conjugués de la Section qu'on demande ; & qu'ainſi leur point d'interſection en ſera le centre ; puiſque ſelon l'une des conditions du Problême, les parallèles FG, KH, doivent être terminées par la Section, auſſi bien que les deux autres parallèles FK, GH. Or cela poſé, ſi l'on prend AB, DE, pour ces deux diametres conjugués, & qu'on nomme (les points L, O, coupent en deux parties égales les lignes FG, KH,) les données CL ou CO, a ; LF ou OK, b ; & l'inconnue CA ou CB, t ; on aura. 1°. Lorſque * la Section eſt une Ellipſe, $BL \times LA\ (tt - aa) . \overline{LF}^2\ (bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: nm . nn$. Et partant $tt = aa + \frac{mmbb}{nn}$. 2°. Lorſque * la Section doit être deux Hyperboles oppoſées, $\overline{CL}^2 \mp \overline{CA}^2\ (aa \mp tt) . \overline{LF}^2\ (bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$; ſçavoir $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorſque la ligne AB eſt un premier diametre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorſ-

* *Art.* 146.

* *Art.* 41 & 55.

* *Art.* 81 & 118.

que c'eſt un ſecond. D'où l'on tire la conſtruction ſuivante, que je diſtingue en trois différens cas.

Premier cas. Lorſque la Section eſt une Ellipſe ; ſoit fait un triangle rectangle VST, dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & ſoit décrit du demi-diametre $CA = TV$, qui ſoit à ſon demi-conjugué CD, comme m eſt à n une Ellipſe : je dis qu'elle ſatisfera au Problême. Car 1°. Le diametre AB parallèle aux côtés FK, GH, eſt à ſon conjugué DE, en la raiſon donnée de m à n. 2°. A cauſe du triangle TSV rectangle en S, le quarré $\overrightarrow{TV}$ ou $\overrightarrow{CA}\,(tt) = \overrightarrow{TS}\,(aa) + \overrightarrow{SV}\left(\frac{mmbb}{nn}\right)$; & partant $BL \times LA\,(tt - aa) = \frac{mmbb}{nn}$: c'eſt pourquoi l'on aura $BL \times LA\left(\frac{mmbb}{nn}\right) . \overrightarrow{LF}\,(bb) :: mm . nn :: \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{DE}$. D'où l'on voit que LF eſt une ordonnée au diametre AB ; & qu'ainſi la Section paſſe par le point F. On prouvera de même que la Section paſſera par les points G, H, K ; puiſque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

Second cas. Lorſque la Section doit être deux Hyperboles oppoſées, & que CL eſt plus grande que $\frac{m}{n} LF$: ſoit formé un triangle TSV rectangle en S, dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothénuſe $VT = CL$; & ſoient décrites du premier demi-diametre $CA = TS$, qui ſoit à ſon demi-conjugué CD, comme m eſt à n, deux Hyperboles oppoſées.

Troiſieme cas. Lorſque la Section doit être deux Hyperboles oppoſées, & que CL eſt plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle TSV rectangle en T dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothénuſe $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira enſuite du ſecond demi-diametre $CA = TV$, qui ſoit à ſon demi-conjugué CD, comme m eſt à n, deux Hyperboles oppoſées.

La démonſtration de ces deux derniers cas eſt ſem-

blable à celle du premier ; mais il faut remarquer que lorſque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problême eſt impoſſible.

COROLLAIRE I.

177. COMME la poſition des deux diametres conjugués AB, DE, eſt déterminée, auſſi bien que leur grandeur ; puiſque ſelon les conditions du Problême ils doivent couper par le milieu les côtés oppoſés du parallélogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diametre CA ou CB qu'une ſeule valeur : il s'enſuit qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule Section qui ſatisfaſſe.

COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallélogramme donné $FGHK$, & qui paſſe par un point donné M.

Car ayant mené les deux diametres conjugués AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés oppoſés du parallélogramme, & du point donné M l'ordonnée MP au diametre AB, laquelle rencontre les côtés oppoſés FK, GH, aux points R, Q, & la Section (que je ſuppoſe décrite) au point N ; il eſt clair que $PN = PM$, & qu'ainſi $RN = QM$, puiſque $PR = PQ$. Le rectangle $RM \times MQ$ ſera donc égal au rectangle $RM \times RN$.

* *Art.* 164. Or * $FR \times RK. MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. Et par conſéquent la raiſon du diametre AB parallèle aux côtés FK, GH, à ſon conjugué DE, eſt donnée, puiſque les rectangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, ſont donnés. De plus la Section ſera une Ellipſe, lorſqu'entre les deux ordonnées MP, KO, au diametre AB, qui tombent du même côté du centre C, celle qui eſt la plus proche du centre eſt plus grande que la plus éloignée ; & au contraire deux Hyperboles oppoſées, lorſqu'elle eſt plus petite. D'où l'on voit que cette queſtion ſe réduit au Problême précédent.

Si

Si le point donné M tomboit ſur l'un des côtés du parallélogramme, prolongé à diſcrétion ; il eſt clair que ce Problême ſeroit alors impoſſible, puiſque ce côté rencontreroit la Section en trois différens points ; ce qui ne peut * être. * *Art.* 149.

COROLLAIRE III.

179. DE-LA on tire encore la maniere de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne AB donnée de poſition, pour centre le point donné C, & pour deux ordonnées à ce diametre les droites MP, KO.

Car ayant pris ſur le diametre AB la partie CL égale à CO, & mené LF parallèle & égale à OK ; il eſt clair qu'elle ſera * une ordonnée au diametre AB, & qu'ainſi prolongeant KO en H, & FL en G, enſorte que $OH = OK$, & $LG = LF$, les droites égales & parallèles KH, FG, ſeront * deux doubles ordonnées au diametre AB. D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallélogramme $FGHK$, & paſſer par le point donné M ; ce qui ſe fera par le moyen du Corollaire précédent. * *Art.* 45, 55, 85 & 118. * *Art.* 144.

Comme cette queſtion ſe réduit à celle du Corollaire précédent, qui ſe réduit au Problême ; & que ſelon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une ſeule Section qui y ſatisfaſſe : il s'enſuit de même qu'on ne peut décrire qu'une ſeule Section qui rempliſſe les conditions de ce dernier Corollaire.

PROPOSITION XV.

Problême.

180. DE'CRIRE *une Section Conique qui paſſe par cinq points donnés* F, M, K, G, N ; *& demontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une ſeule.* FIG. 102 ; 103.

Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites FG, MN, qui ſe rencontrent au point R, on menera par le cinquieme point donné K deux droites KD, KH, parallèles aux droites FG, MN, & qui les rencontrent aux points E, Q. On prendra ſur ces deux lignes prolongées, s'il eſt néceſſaire, les points D, H, tels que $MR \times RN. GR \times RF :: ME \times EN. KE \times ED.$ Et $FR \times RG. MR \times RN :: FQ \times QG. HQ \times QK.$ en obſervant que les points K, D, ou K, H, doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre E, ou Q, lorſque les points M, N, ou F, G, tombent auſſi de part & d'autre de ce même point; & au contraire. On menera enſuite par les points de milieu des parallèles DK, FG, & MN, KH, les droites LI, AB, qui s'entrecoupent au point C. On décrira enfin * la Section Conique qui a pour diametre la ligne AB donnée de poſition, pour centre le point donné C, & pour ordonnées les deux droites MP, KO. Je dis qu'elle ſatisfera au Problême, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* *Art.* 179.

Car les deux points D, H, ſeront * à la Section qui paſſe par les cinq points donnés F, M, K, G, N; & ainſi les lignes LI, AB, en ſeront * deux diametres, qui en détermineront par conſéquent le centre par leur point d'interſection C. Il eſt donc évident que la Section Conique qui paſſe par les cinq points donnés, doit avoir néceſſairement pour diametre la ligne AB donnée de poſition pour centre le point C, & pour ordonnées au diametre AB les droites MP, KO. Or comme il n'y a qu'une ſeule Section Conique qui puiſſe remplir ces conditions, il s'enſuit que ce ſera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* *Art.* 166.

* *Art.* 146 & 147.

S'il arrive que les diametres AB, LI, ſoient paralèles entr'eux; la Section ſera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

* *Art.* 147.

LIVRE CINQUIEME.

De la comparaiſon des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.

LEMME I.

181. SI *la différence de deux quantités diminue continuellement, enſorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités ſeront égales.*

Car ſi elles ne l'étoient pas, on pourroit aſſigner entr'elles quelque différence; ce qui eſt contre l'hypothèſe.

LEMME II.

182. SI *la raiſon de deux quantités eſt telle que l'antécédent demeurant toujours le meme, ſa différence avec ſon conſéquent diminue continuellement, enſorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités ſeront égales.*

Car par le Lemme * précédent, l'antécédent ſera égal à ſon conſéquent; & ainſi les quantités dont ils expriment le rapport, ſeront égales. * *Art.* 181.

LEMME III.

183. SI *l'on ſuppoſe ſur une ligne courbe quelconque* ABG *un arc* MN *infiniment petit, c'eſt-à-dire, moindre qu'aucune grandeur donnée; & qu'on imagine par les extrémités de cet arc les ordonnées* MP, NQ, *à l'axe ou diametre* AC, *avec les parallèles* MR, NS, *à ce diametre: je dis que les parallélogrammes* PQRM, PQNS, *peuvent être pris chacun pour l'eſpace* PQNM *renfermé entre les ordonnées* PM, QN, *la petite droite* PQ, *& le petit arc de la courbe* MN. FIG. 104.

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent continuellement de plus en plus de ſon diametre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus; ou enfin cette ligne courbe eſt compoſée de pluſieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de ſon diametre. Car il eſt évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points ſoient également éloignés de ſon diametre; puiſqu'alors cette portion ne ſeroit plus courbe, mais une ligne droite parallèle à ce diametre.

Suppoſons 1°. Que l'arc MN ſoit ſur une courbe AMB dont tous les points s'éloignent de plus en plus de ſon diametre AC. Si l'on prend du côté du point N l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'ayant mené l'ordonnée OF parallèle à MP, on tire les droites OD, ME, parallèles au diametre AC; il eſt clair que l'eſpace curviligne $PFOM$ ſera plus grand que le parallélogramme inſcrit $PFEM$, & moindre que le parallélogramme circonſcrit $PFOD$. Or ſi l'on imagine que le point O ſe meuve ſuivant la courbe vers le point M il eſt viſible que le parallélogramme $MEOD$ qui eſt la différence des parallélogrammes inſcrits & circonſcrits à l'arc OM, diminuera continuellement juſqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zéro dans l'inſtant que le point O parvient en M. D'où il ſuit que lorſque le point O eſt arrivé en N, c'eſt-à-dire, infiniment près de M, le parallélogramme $MEOD$, qui devient $MRNS$, ſera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il eſt donc évident ſelon le Lemme * premier, que les parallélogrammes $PQRM$, $PQNS$, deviennent alors égaux entr'eux; & par conſéquent auſſi égaux chacun à l'eſpace curviligne $PQNM$. Donc, &c.

* Art. 181.

Suppoſons 2°. Que le petit arc MN ſoit ſur une courbe BMG dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de ſon diametre CG. Il eſt viſible que la démonſtration demeure la même que pour le premier

cas, en obſervant ſimplement que le parallélogramme circonſcrit $PQNS$ devient inſcrit dans ce cas-ci.

Suppoſons 3°. Qu'une ligne courbe telle que ABG, ſoit compoſée de pluſieurs portions dont les unes, comme AB, s'éloignent de plus en plus du diametre AG; & les autres au contraire, comme BG, s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme B, qui ſéparent ces portions, ne peuvent tomber ſur les arcs MN: car ſi cela étoit le point B ſeroit plus près du point M que n'eſt le point N; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Il eſt donc évident que ce dernier cas eſt néceſſairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

COROLLAIRE I.

184. DE-LA il ſuit que ſi l'on mene par-tout où l'on voudra une ordonnée CB parallèle à PM, & qu'on imagine que la portion de courbe AB ſoit diviſée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que MN; l'eſpace ACB renfermé par les droites AC, CB, & par la portion de courbe AB, ſera égal à la ſomme de tous les parallélogrammes tels que $PQRM$ ou $PQNS$. Il s'enſuit de même que l'eſpace $MPCB$ renfermé par les droites MP, PC, CB, & par la portion de courbe MB, ſera égal à la ſomme de tout ce qu'il y aura de ces parallélogrammes dans cet eſpace; & de même dans toute l'étendue de la courbe ABG.

COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque $CMDOC$ renfermée entre deux parallèles CE, DF, & qu'on imagine par-tout où l'on voudra entre ces parallèles deux droites MO, NL, infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur ſoient auſſi parallèles; je dis que l'eſpace $OMNL$ qu'elles couperont dans la figure $CMDOC$, ſera égal au rectangle d'une d'elles, comme de MO, par leur diſtance MR ou OS. Car menant la perpendicu- FIG. 105.

laire AB ſur les parallèles CE, DF, laquelle rencontre les parallèles MO, NL, aux points P, Q; il eſt clair par le Lemme * que l'eſpace $PMNQ$ eſt égal au rectangle $PMRQ$, & l'eſpace $POLQ$ au rectangle $POSQ$; & par conſéquent que l'eſpace $OMNL$ eſt égal au rectangle $OMRS$ ou $OM \times PQ$.

* *Art.* 183.

COROLLAIRE III.

186. IL ſuit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques $CMDOC, EGFHE$ renfermées entre deux parallèles CE, DF, & qui ſoient telles qu'ayant mené entre ces parallèles par-tout où l'on voudra une ligne MH parallèles aux droites CE, DF; les parties MO, GH, de cette ligne compriſes dans les figures $CMDOC, EGFHE$, ſoient toujours entr'elles en raiſon donnée: il ſuit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les eſpaces qu'elles comprennent) ſont auſſi entr'elles en raiſon donnée. Car imaginant une autre parallèle NK infiniment proche de MH, & tirant une perpendiculaire AB ſur les parallèles CE, DF, laquelle rencontre les parallèles MH, NK, aux points P, Q; il eſt clair par le Corollaire * précédent que l'eſpace $OMNL$ eſt égal au rectangle $OM \times PQ$, & de même que l'eſpace $GHKI$ eſt égal au rectangle $GH \times PQ$. Ces deux eſpaces ſeront donc entr'eux comme MO eſt à GH; & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on mene la droite MH, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits eſpaces $MNLO$, c'eſt-à-dire, l'eſpace $CMDOC$ ſera à la ſomme de tous les petits eſpaces $GHKI$, c'eſt-à-dire, à l'eſpace $EGFHE$, en la raiſon donnée.

* *Art.* 185.

On prouvera de même que la partie MDO de la figure $CMDOC$, eſt encore à la partie correſpondante GFH de l'autre figure $EGFHE$, en la raiſon donnée : comme auſſi les parties reſtantes CMO, EGH.

Il eſt viſible que ſi la raiſon donnée eſt celle d'égalité,

c'eſt-à-dire, que ſi les parties MO, GH, de la droite MH, ſont toujours égales entr'elles ; les eſpaces $CMDOC$, $EGFHE$, & leurs parties correſpondantes MDO, GFH, & CMO, EGH, ſeront égales entr'elles.

LEMME IV.

187. SI *l'on ſuppoſe ſur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit* MN ; *& qu'on imagine les tangentes* MT, NT, *qui ſe rencontrent au point* T, *la ſoutendante* MN, *& la droite* NS *perpendiculaire ſur* MT *prolongée : je dis qu'on peut prendre pour l'arc* MN *ſa ſoutendante* MN, *ou la ſomme des deux tangentes* MT, NT, *ou enfin la droite* MS. FIG. 106.

Toute ligne courbe eſt néceſſairement ou toujours concave vers un certain endroit, ou compoſée de pluſieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le ſont vers le côté oppoſé. Or les points qui ſéparent ces portions * ne peuvent point ſe trouver ſur les arcs infiniment petits MN : puiſqu'ils ſeroient plus près du point M que n'eſt le point N ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. On peut donc toujours ſuppoſer que l'arc MN fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui eſt toujours concave vers un certain côté. * *Art.* 183. *n.* 3.

Maintenant ſi l'on prend ſur la courbe du côté du point N, l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'on tire la ſoutendante OM, la tangente OG, & la parallèle OD à NS : il eſt clair 1°. A cauſe du triangle MDO rectangle en D, que la tangente MD eſt moindre que la ſoutendante MO, & à plus forte raiſon moindre que l'arc MNO ; de ſorte que l'arc MNO & ſa ſoutendante MO ſont plus grands chacun que MD, & chacun moindre que la ſomme des deux tangentes MG, OG. 2°. A cauſe de la concavité de l'arc MNO vers le même côté, ſi l'on mene par un point quelconque N de l'arc MO une tangente TR, les points T, R, où elle rencontre les tangentes MG, OG, ſeront ſitués entre les points M, G, & O, G ; ainſi

l'angle OGD, qui eſt externe au triangle TGR, eſt plus grand que l'angle RTG ou NTS.

Ceci ſuppoſé, ſi l'on mene les droites ME, MF, parallèles aux tangentes OG, NT, & qui rencontrent la droite DO aux points E, F; & qu'on imagine que le point O ſe meuve ſuivant la courbe vers le point M: il eſt viſible que l'angle OGD, ou ſon égal EMD, diminuera continuellement juſqu'à ce qu'il s'évanouiſſe dans l'inſtant que le point O parvient en M; puiſqu'alors la tangente OG ſe confond avec la tangente MD: d'où il ſuit que la ligne ME diminue continuellement, juſqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à MD dans cet inſtant. Donc lorſque le point O eſt arrivé en N, c'eſt-à-dire, infiniment près du point M, la ligne ME, alors en MF, ne ſera pour lors différente de la tangente MD, que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par conſéquent * les lignes TN, TS, dont elles expriment le rapport, ſeront égales entr'elles. Les deux tangentes MT, TN, priſes enſemble, ſeront donc égales à la droite MS, comme auſſi à l'arc MN, & à la ſoûtendante MN. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 182.

COROLLAIRE I.

188. PUISQUE l'angle FMD, ou ſon égal NTS, eſt infiniment petit dans la ſuppoſition que le point N ſoit infiniment près du point M, il s'enſuit que dans le triangle MTN, l'angle interne NMT, qui eſt moindre que l'extérieur NTS, ſera auſſi infiniment petit, c'eſt-à-dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainſi on ne pourra mener par le point M aucune ligne droite qui tombe dans l'angle TMN. D'où l'on voit que ces deux lignes MT, NM, ſe confondent entr'elles, & qu'ainſi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui paſſe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROLLAIRE II.

COROLLAIRE II.

189. SI l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque ſoit diviſée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits tels que MN; il eſt clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs ſoutendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe : puiſqu'elle * n'en différera en aucune maniere. De plus, les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, ſeront les tangentes de cette courbe ; puiſqu'ils paſſent chacun par deux de ſes points infiniment proches l'un de l'autre.

* *Art.* 137.

REMARQUE.

190. ON doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui ſont toujours concaves dans toute leur étendue vers le même côté, comme ſont * ces Sections : au lieu que cette derniere notion eſt générale pour toutes ſortes de lignes courbes. Auſſi eſt-ce elle qui ſert de fondement à la méthode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'oſe aſſurer être la plus ſimple & la plus générale qu'on puiſſe ſouhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre.

* *Art.* 26, 61, 124.

DÉFINITIONS.

1.

Deux ſegmens de lignes courbes quelconques BAD, bad, ſont appellés *Semblables* ; lorſqu'ayant inſcrit dans l'un d'eux une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, on peut toujours inſcrire dans l'autre une figure rectiligne ſemblable $bmnod$.

FIG. 107, 108, 109.

2.

Deux Sections Coniques ſont appellées *Semblables* ; lorſqu'ayant pris dans l'une d'elles un ſegment quelcon-

que BAD, on peut toujours aſſigner dans l'autre un ſegment ſemblable bad.

3.

On appelle diametres *Semblables* AP, ap, dans différentes Sections Coniques, ceux qui ſont avec leurs ordonnées PM, pm, les mêmes angles APM, apm.

COROLLAIRE.

191. PLUS chacun des côtés BM, MN, &c. bm, mn, &c. devient petit; plus leur nombre augmente, & plus auſſi les figures rectilignes ſemblables $BMNOD$, $bmnod$, approchent des ſegmens BAD, bad, auxquels elles ſont inſcrites; de ſorte qu'elles leur deviennent enfin égales * lorſque chacun des côtés eſt infiniment petit, & que leur nombre par conſéquent eſt infini. D'où il ſuit que les ſegmens ſemblables BAD, bad, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs ſoutendantes BD, bd, qui ſont des côtés homologues; & les portions des courbes BAD, bad; comme ces ſoutendantes.

* *Art.* 189.

PROPOSITION I.

Théorême.

Fig. 107.

192. SOIENT *deux Paraboles* AM, am, *qui ayent deux diametres ſemblables* AL, aL, *ſitués ſur la même droite, enſorte que leurs ordonnées* PM, pm, *ſoient parallèles entr'elles; & ſoit marqué ſur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe* L, *tel que* LA *ſoit à* La, *comme le parametre* AG *du diametre* AL *de la Parabole* AM, *eſt au parametre* ag *du diametre* aL *de la Parabole* am. *Je dis que ſi l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Parabole* AM, *une ligne droite* LM; *elle rencontrera l'autre Parabole* am *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; AG, p; & les indéterminées AP, x;

PM, y; on aura $LA\,(a).\ La, (b) :: AG\,(p).\ ag = \frac{bp}{a}$. Or ſi l'on prend ſur le diametre aL de la Parabole am, la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il eſt clair * que $\overline{pm}^2 = pa \times ag\ \left(\frac{bbpx}{aa}\right) = \frac{bbyy}{aa}$ en mettant pour px * ſa valeur yy; & qu'ainſi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\,(y).\ pm\ \left(\frac{by}{a}\right) :: LP\,(a-x).\ Lp\ \left(b - \frac{bx}{a}\right)$. Et par conſéquent la ligne LM paſſera par le point m extrêmité de l'ordonnée pm, c'eſt-à-dire, qu'elle coupera la Parabole am en ce point. Donc à cauſe des triangles ſemblables LPM, Lpm, on aura $LM.\ Lm :: PM\,(y).\ pm\ \left(\frac{by}{a}\right) :: LA\,(a).\ La\,(b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 6 & 20.

* *Ibid.*

COROLLAIRE I.

193. SI l'on prend dans la Parabole AM un ſegment quelconque BAD; & qu'ayant mené les droites LB, LD, qui rencontrent l'autre Parabole am aux points b, d, on tire la ſoutendante bd: je dis que le ſegment bad de la Parabole am, eſt ſemblable au ſegment BAD de la Parabole AM. Car ayant inſcrit dans le ſegment BAD une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, il eſt clair que ſi l'on mene les droites LM, LN, LO, qui rencontrent l'autre Parabole aux points m, n, o; les triangles LBM, Lbm; LMN, Lmn; LNO, Lno; LOD, Lod; LBD, Lbd, ſeront ſemblables; & qu'ainſi les côtés BM, bm; MN, mn; NO, no; OD, od; BD, bd; ſeront parallèles, & toujours en même raiſon chacun à ſon correſpondant; puiſque toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD, ſont coupées en même raiſon aux points b, m, n, o, d. D'où l'on voit que les figures rectilignes $BMNOD$, $bmnod$, ſont ſemblables. Or comme il eſt évident que cette démonſtration ſubſiſte toujours, telle que puiſſe être la figure rectiligne inſcrite dans le ſegment BAD;

il s'enſuit que les ſegmens BAD, bad, * ſont ſemblables ; & par conſéquent * que les Paraboles AM, am, le ſont auſſi.

* *Déf.* 1.
* *Déf.* 2.

COROLLAIRE II.

194. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene par le point L une double ordonnée EF dans la Parabole AM, laquelle rencontre l'autre Parabole am aux points c, f; les ſegmens EAF, caf, des deux Paraboles AM, am, ſeront ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE III.

195. TOUTES les Paraboles ſont ſemblables entr'elles ; car ſi l'on prend ſur deux diametres ſemblables de deux différentes Paraboles, les parties AL, aL, qui ſoient entr'elles comme les parametres AG, ag; & ſi l'on conçoit que le diametre La ſoit ſitué ſur le diametre LA, enſorte que les points L, L, tombent l'un ſur l'autre, & que leurs ordonnées PM, pm, ſoient paralleles entr'elles : il eſt clair qu'ayant mené du point fixe L à un point quelconque M de la Parabole AM, une ligne droite LM; elle rencontrera toujours l'autre Parabole am en un point m tel que $LM. Lm :: LA. La$. Donc, * &c.

* *Art.* 193.

COROLLAIRE IV.

196. DE-LA il ſuit que ſi l'on prend ſur deux diametres ſemblables de deux différentes Paraboles, les parties AL, aL, qui ſoient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points L, L, les doubles ordonnées EF, ef: les ſegmens EAF, eaf, des deux Paraboles AM, am, ſeront ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE V.

197. SI deux ſegmens BAD, bad, ſont ſemblables entr'eux, & que l'un d'eux BAD, ſoit le ſegment d'une

Parabole ; je dis que l'autre bad ſera le ſegment d'une autre Parabole, & qu'ainſi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puiſſent être ſemblables à une Parabole donnée. Car ſi l'on place le petit ſegment bad au dedans du grand BAD, enſorte que les ſoutendantes bd, BD, ſoient parallèles ; & qu'on inſcrive dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables $BMNOD$, $bmnod$: il eſt clair que les côtés homologues BM, bm ; MN, mn ; &c. de ces deux figures ſeront parallèles : puiſque les angles DBM, dbm ; BMN, bmn ; &c. ſont égaux entr'eux. Or menant LM, LN, LO, par le point de concours L des deux droites Bb, Dd, qui joignent les extrêmités des ſoutendantes parallèles BD, bd, qui ſont les deux côtés homologues donnés ; ces droites LM, LN, LO, paſſeront par les points correſpondans m, n, o, où elles ſeront diviſées en même raiſon que LB l'eſt en b. ou LD en d ; puiſque $BD. bd :: LB. Lb :: BM. bm :: LM. Lm :: MN. Mn :: LN. Ln :: NO. no :: LO. Lo :: OD. od$.

Maintenant ſi l'on mene par le point L le diametre LA de la Parabole AM ; qu'on le diviſe en a, en la même raiſon que LB l'eſt en b, ou LD en d ; & qu'on décrive * du diametre aL, & du parametre ag qui ſoit au parametre AG du diametre AL de la Parabole AM, comme La eſt à LA, une Parabole am dont les ordonnées pm ſoient parallèles aux ordonnées PM de l'autre Parabole : il eſt évident * qu'elle paſſera par tous les points b, m, n, o, d, qui diviſent dans la raiſon donnée de BD à bd toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD. Or comme ce raiſonnement ſubſiſte toujours tel que puiſſe être le nombre des côtés des figures rectilignes ſemblables $BMNOD$, $bmnod$, & de telle grandeur qu'ils puiſſent être ; il s'enſuit que la Parabole am paſſe par-tout par où le ſegment bad paſſe, & qu'ainſi ce ſegment en eſt une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 161.

* *Art.* 192.

PROPOSITION II.

Théorême.

FIG. 108, 109. 198. SOIT *une Ellipſe ou Hyperbole* AM *qui ait pour un de ſes premiers diametres la ligne* AH, *& pour parametre de ce diametre la ligne* AG; *& ayant pris ſur ce diametre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe* L, *& diviſé en méme raiſon aux points* a, h, *ſes parties* LA, LH. *Soit une autre Ellipſe ou Hyperbole* am *qui ait pour premier diametre la ligne* ah, *pour parametre de ce diametre la ligne* ag *qui ſoit à* AG *comme* ah *eſt à* AH, *& dont les ordonnées* pm *ſoient parallèles aux ordonnées* PM *de l'autre Section* AM. *Je dis que ſi l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Section* AM, *une ligne droite quelconque* LM; *elle rencontrera l'autre Section* am, *en un point* m *tel que* LM. Lm :: L●. La: *c'eſt-à-dire que toutes les droites tirées du point fixe* L *aux points de la Section* AM, *ſont diviſées en méme raiſon par la Section* am.

Il faut prouver que LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; $AH, 2t$; & les indéterminées AP, x; PM, y; on aura $LA\ (a).\ La\ (b)\ ::\ LH.\ Lh\ ::\ LH \pm LA$ ou $AH\ (2t).\ Lh \pm La$ ou $ah = \frac{2bt}{a}$. Or ſi l'on prend ſur le diametre ah de la Section am la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il eſt

*Art. 42, 55, 81 & 118. clair * que $AP \times PH\ (2tx \pm xx).\ \overline{PM}^2\ (yy)\ ::\ AH.\ AG\ ::\ ah.\ ag\ ::\ ap \times ph\ \left(\frac{2bbtx \pm bbxx}{aa}\right).\ \overline{pm}^2 = \frac{bbyy}{aa}$, & qu'ainſi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM(y).\ pm\ \left(\frac{by}{a}\right)\ ::\ LP\ (a - x).\ Lp\ \left(b - \frac{bx}{a}\right)$. Et par conſéquent la ligne LM paſſera par le point m extrêmité de l'ordonnée pm, c'eſt-à-dire qu'elle coupera la Section am en ce point. Donc à cauſe des triangles ſemblables LPM, Lpm, on aura

$LM. Lm :: PM(y). pm\left(\frac{by}{a}\right) :: LA(a). La(b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

199. SI l'on prend dans la Section AM un ſegment quelconque BAD, & qu'ayant mené les droites LB, LD, qui rencontrent l'autre Section am aux points b, d, on tire la ſoutendante bd : je dis que le ſegment bad de la Section am eſt ſemblable au ſegment BAD de la Section AM ; & partant que ſi l'on mene par le point L une double ordonnée EF dans la Section AM, laquelle rencontre l'autre Section aux points e, f ; les ſegmens EAF, eaf, des deux Ellipſes ou des deux Hyperboles AM, am, ſeront ſemblables entr'eux. Cela ſe prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193 & 194.

COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipſes ou Hyperboles AM, am, qui ont deux diametres ſemblables AH, ah, en même raiſon avec leurs parametres AG, ag, ſont ſemblables entr'elles. Car ſi l'on prend les parties AL, aL, qui ſoient entr'elles comme les diametres AH, ah ; & que l'on conçoive que le diametre ah ſoit ſitué ſur le diametre AH, enſorte que les points L, L, tombent l'un ſur l'autre, & que les ordonnées pm, PM, ſoient parallèles entr'elles : il eſt clair qu'ayant mené du point fixe L à un point quelconque M de la Section AM une ligne droite LM, elle rencontrera toujours l'autre Section am, en un point m tel que $LM. Lm :: LA. La$. Donc, * &c.

* *Art.* 199.

COROLLAIRE III.

201. DE-LA il eſt évident que s'il y a deux Ellipſes ou deux Hyperboles AM, am, dont deux diametres ſemblables AH, ah, ſoient en même raiſon avec leurs parametres AG, ag ; & qu'ayant pris les parties AL, aL,

qui ſoient entr'elles comme les diametres AH, ah, on tire par les points L, L, les doubles ordonnées EF, ef: il eſt évident, dis-je, que les ſegmens EAF, eaf, des deux Sections AM, am, ſont ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE IV.

202. SI deux ſegmens BAD, bad, ſont ſemblables entr'eux; & que l'un d'eux ſoit le ſegment d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole AM, qui ait pour un de ſes diametres quelconques la ligne AH dont le parametre eſt AG; je dis que l'autre bad ſera le ſegment d'une autre Ellipſe ou d'une autre Hyperbole am, qui aura pour l'un de ſes diametres ſemblables à AH, la ligne ah qui ſera en même raiſon avec ſon parametre ag, que AH avec le ſien AG. Car ayant placé le ſegment bad, au dedans du ſegment BAD, enſorte que la ſoutendante bd ſoit parallèle à la ſoutendante BD, & que les lignes Bb, Dd, concourent en un point L du diametre AH (ce qui eſt toujours poſſible), & inſcrit dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197, que les droites LM, LN, LO, paſſeront par les points correſpondans m, n, o, où elles ſeront diviſées en même raiſon que LB l'eſt en b, ou LD en d.

Maintenant ſi l'on diviſe les parties LA, LH, du diametre AH aux points a, h, en même raiſon que LB l'eſt en b; & qu'on décrive * du diametre ah & du parametre ag qui ſoit au parametre AG du diametre AH, comme La eſt à LA, ou ah à AH, une Ellipſe ou une Hyperbole am, dont les ordonnées pm ſoient parallèles aux ordonnées PM de l'autre Ellipſe ou Hyperbole AM: il eſt évident * qu'elle paſſera par tous les points b, m, n, o, d, qui diviſent dans la raiſon donnée de bd à BD toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD. Or comme ce raiſonnement ſubſiſte toujours tel que puiſſe être le nombre des côtés des figures rectilignes ſemblables

* *Art.* 161.

* *Art.* 198.

ſemblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puiſſent être ; il s'enſuit que l'Ellipſe ou l'Hyperbole *am* paſſe par tous les mêmes points par leſquels paſſe le ſegment *bd*, & qu'ainſi ce ſegment en eſt une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE V.

203. IL eſt donc évident que ſi deux Ellipſes ou deux Hyperboles *AM*, *am*, ſont ſemblables, & qu'on prenne dans la Section *AM* un de ſes diametres quelconques *AH* ; il y aura toujours dans l'autre Section *am* un diametre *ah* ſemblable à *AH*, qui aura avec ſon parametre *ag* la même raiſon que *AH* avec le ſien *AG* : & qu'ainſi les diametres ſemblables *AH*, *ah*, ſeront en même raiſon avec leurs diametres conjugués. Or comme dans une Ellipſe ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux différens diametres conjugués qui faſſent entr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne diffèrent que par leur poſition, leur grandeur demeurant la même ; il s'enſuit que dans les Ellipſes ou les Hyperboles ſemblables tous les diametres conjugués qui feront les mêmes angles, ſeront entr'eux en même raiſon ; en obſervant de prendre pour les antécédens de ces deux raiſons les plus grands de ces deux diametres conjugués, & pour conſéquens les moindres.

* *Art.* 66 & 128.

PROPOSITION III.

Théorême.

204. SI *l'on mene dans une Section Conique deux parallèles quelconques* BD, EF, *terminées par la Section ; & qu'on joigne leurs extrémités par deux droites* BE, DF : *je dis que les ſegmens* BMEB, DMFD, *compris par des portions de la Section, & par les droites qui joignent les extrémités des parallèles, ſeront égaux entr'eux.* FIG. 110, 111.

Car ayant prolongé les ſoutendantes BE, DF, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en un point G, & ayant mené par ce point & par le point de milieu H de la ligne BD, la droite GH; il eſt clair qu'elle diviſera par le milieu en K la parallèle EF à BD, comme auſſi par le milieu en P un autre parallèle quelconque OO à la même ligne BD. Donc la ligne HK ſera un diametre * qui aura pour ordonnées de part & d'autres les parallèles BD, EF; & partant ſi l'on mene par un de ſes points quelconques P une parallèle à ces lignes, elle rencontrera * la Section en deux points M, M, également éloignés du point P; d'où l'on voit que les parties MO, OM, de la même parallèle MM à BD, compriſes dans les ſegmens $BMEB$, $DMFD$, ſont toujours égales entr'elles, en quelque endroit que puiſſe tomber cette parallèle entre les lignes BD, EF. Il eſt donc évident * que ces deux ſegmens ſeront égaux entr'eux.

* *Art.* 146.

* *Art.* 144.

* *Art.* 186.

Si les ſoutendantes BE, DF, étoient parallèles entr'elles, il faudroit mener par le point de mileu H de la ligne BD une droite HK parallèle à ces ſoutendantes, & la démonſtration demeureroit toujours la même.

COROLLAIRE I.

FIG. 110. 205. PUISQUE PM eſt toujours égale à PM; il s'enſuit 1°. Que les Trapéſes Coniques $KHBE$, $KHDF$, ſont égaux entr'eux. 2°. (Lorſque la ligne BD au lieu de rencontrer la Section en deux points, la touche en un point A) que les Trilignes Coniques AKE, AKF, ſont égaux; & qu'ainſi les ſegmens $AEMA$, $AFMA$, le ſont auſſi; puiſque le triangle AEF eſt diviſé en deux parties égales par le diametre AK qui paſſe par le milieu de EF.

COROLLAIRE II.

FIG. 110. 206. SI la Section étant une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole, l'on mene par les extrémités des parallèles

BD, EF, les droites BF, DE, qui s'entrecoupent entre ces parallèles; les ſegmens $BFDAB, DEBAD$, ſeront égaux entr'eux. Car les triangles BFD, BED, qui ſont entre les mêmes parallèles BD, EF, & qui ont la même baſe BD, ſont égaux entr'eux; & partant ſi l'on ajoute d'une part le ſegment $DMFD$ plus le ſegment $BADB$, & de l'autre $BMEB$ égal au ſegment $DMFD$, plus auſſi le même ſegment $BADB$; les touts $BFDAB$, $DEBAD$, ſeront égaux entr'eux.

Corollaire III.

207. De-la on voit comment on peut couper par un point donné D ſur une Section Conique, deux ſegmens $DGED, DFBD$, égaux chacun à un ſegment donné $BEDB$. Car ayant tiré les droites BD, DE, & mené BG parallèle à DE, & EF parallèle à BD, leſquelles rencontrent la Section aux points G, F; il eſt clair * en joignant la droite DF, que le ſegment $DFBD$ eſt égal au ſegment $BEDB$, à cauſe des parallèles DB, EF; & de même en joignant DG, que le ſegment $DGED$ eſt égal au ſegment $BEDB$, à cauſe des parallèles BG, DE. Fig. 112. * Art. 206.

Si le point donné tomboit ſur l'une des extrêmités du ſegment donné que je ſuppoſe être à préſent $DGED$, il faudroit mener par l'autre extrêmité G, une parallèle GF à la tangente qui paſſe par le point D; & tirant par le point F où cette parallèle rencontre la Section, & par le point donné D, la ſoutendante DF, il eſt clair que le ſegment $DFBD$ ſera égal au ſegment donné $DGED$.

Il eſt viſible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le ſeul ſegment $DFBD$ qui ſoit égal au ſegment donné $DGED$; puiſque tout autre ſegment qui aura pour l'une de ſes extrêmités le point donné D, ſera plus grand ou moindre que le ſegment $DFBD$, ſelon que ſon autre extrêmité ſera plus proche ou plus éloignée du point D que n'eſt le point F. D'où il ſuit que ſi deux ſegmens $DGED$, $DFBD$, qui ont une extrêmité commune D, ſont égaux

entr'eux ; & que ſi l'on mene par le point D une parallèle à la droite GF qui joint leurs autres extrêmités, elle ſera tangente en D.

COROLLAIRE IV.

208. ON tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aiſée de mener une Tangente par un point donné D ſur une Section Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques DB, BE, qui rencontrent la Section aux points B, E, on menera par le point B une parallèle BG à DE, & par le point E une parallèle EF à BD, leſquelles rencontrent la Section aux points G, F, que l'on joindra par une ligne droite GF, à laquelle on tirera par le point D une parallèle qui ſera la tangente cherchée ; puiſque les ſegmens $DGED$, $DFBD$, étant égaux chacun au même ſegment $BEDB$, le ſeront entr'eux.

PROPOSITION IV.

Théorême.

Fig. 113, 114, 115.

209. S'IL *y a dans une Ellipſe, dans une Hyperbole, ou dans les Hyperboles oppoſées deux lignes droites* BD, EF, *parallèles entr'elles & terminées par la Section ; & qu'on tire du centre* C *les demi-diametres* CB, CE, CD, CF ; *les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques* CBE, CDF, *ſeront égaux entr'eux.*

Car menant par les points de milieu H, K, des droites BD, EF, le diametre CK, les triangles CHB, CHD, & CKE, CKF, ſeront égaux entr'eux ; puiſqu'ils ont le même ſommet C, & que leurs baſes HB, HD, & KE, KF, ſont égales. Par conſéquent (*fig.* 114.) $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD = KHDF + CDF$; & (*fig.* 113, 115.) $KHBE - CBE = \mp CHB \mp CKE = \mp CHD \mp CKF = KHDF - CDF$. Donc puiſque les Trapeſes Coniques $KHBE$,

KHDF, ſont * égaux, il s'enſuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques *CBE*, *CDF*, le ſeront auſſi. * *Art.* 205.

COROLLAIRE I.

210. SI la Section eſt une Ellipſe ou une Hyperbole; & que la ligne *BD* parallèle à *EF*, devienne tangente en *A*; il eſt clair que les Secteurs *CAE*, *CAF*, ſeront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diametre *CA* juſqu'à ce qu'il rencontre la ligne *EF* au point *K*, cette ligne ſera coupée en deux également en ce point; & par conſéquent les triangles *CKE*, *CKF*, ſeront égaux. Or les trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, le ſont * auſſi. Donc, &c. FIG. 113, 114. * *Art.* 205.

COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviſer en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque *CEF*; il n'y a qu'à mener le demi-diametre *CA* qui diviſe par le milieu en *K* la ſoutendante *EF* de ce Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs *CBE*, *CDF*, égaux entr'eux, en ſuppoſant *BD* parallèle à *EF*. Car ayant de cette maniere les Secteurs *CAE*, *CAF*, & *CAB*, *CAD*, égaux entr'eux, les Secteurs *CBE*, *CDF*, qui en ſont les différences, doivent auſſi être égaux entr'eux.

PROPOSITION V.

Théorême.

212. SOIT *un demi-cercle* ADH, *qui ait pour diametre le premier ou grand axe* AH *d'une demie-Ellipſe* ABH; *ſoit menée par un point quelconque* P *de l'axe* AH, *une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipſe au point* M, *& le cercle au point* N; *par où & par le centre* C *ſoient tirées les droites* CM, CN. *Je dis que* FIG. 116.

le Secteur Elliptique CAM *eſt au Secteur circulaire* CAN, *comme la moitié* CB *du petit axe de l'Ellipſe, eſt à la moitié* CA *ou* CD *du grand.*

* *Art.* 42 & 55. Car par la propriété * de l'Ellipſe $\overline{PM}.\ \overline{CB} :: AP \times PH.\ AC \times CH$ ou $\overline{CA}$, & par la propriété du cercle $\overline{PN}.\ \overline{CD} :: AP \times PH.\ AC \times CH$ ou $\overline{CA}$. Donc $\overline{PM}.\ \overline{CB} :: \overline{PN}.\ \overline{CD}$. ou $\overline{PM}.\ \overline{PN} :: \overline{CB}.\ \overline{CD}$. Et en tirant les racines quarrées, $PM.\ PN :: CB.\ CD$ ou CA. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire PMN, il

* *Art.* 186. s'enſuit * que l'eſpace Elliptique entier $ABHA$ eſt au demi-cercle $ADHA$, & la portion APM de cet eſpace à la portion APN du demi-cercle, comme CB eſt à CD ou à CA. Mais le triangle rectangle CPM eſt au triangle rectangle CPN qui a la même hauteur, comme la baſe PM eſt à la baſe PN, c'eſt-à-dire, comme CB eſt à CD ou à CA; & par conſéquent l'eſpace Elliptique APM plus ou moins le triangle CPM (plus lorſque AP eſt moindre que AC, & moins lorſqu'elle eſt plus grande) c'eſt-à-dire, le Secteur Elliptique CAM ſera à l'eſpace circulaire APN plus ou moins le triangle CPN, c'eſt-à-dire, au Secteur circulaire CAN, comme CB eſt à CD ou à CA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

213. COMME le Secteur de cercle CAN eſt égal au rectangle de l'arc AN par la moitié du rayon CA ou CD; il s'enſuit que le Secteur Elliptique CAM eſt auſſi égal au rectangle de ce même arc AN par la moitié de CB.

COROLLAIRE II.

214. SI l'on mene par un point quelconque G du grand axe AH autre que le point P, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipſe au point E, & le

cercle au point F ; je dis que les Secteurs Elliptiques ACE, ACM, ſont entr'eux comme les Secteurs circulaires ACF, ACN. Car $ACM. ACN :: CB. CD$. Et de même $ACE. ACF :: CB. CD$. Et partant $ACM. ACN :: ACE. ACF$. Et $ACM. ACE :: ACN. ACF$. D'où l'on voit que pour trouver un Secteur Elliptique ACM, qui ſoit au Secteur Elliptique ACE en raiſon donnée ; il n'eſt queſtion que de trouver un Secteur circulaire ACN qui ſoit en raiſon donnée au Secteur ACF, ou ce qui eſt la même choſe, de diviſer en raiſon donnée l'arc ANF ou l'angle ACF.

PROPOSITION VI.

Théorême.

215. *S'il y a deux demi-Hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent pour centres le même point* C, *pour un de leurs demi-diametres la même droite* CA, *& pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametre* CA, *deux droites quelconques* CB, CD, *ſituées ſur la même ligne ; & qu'on mene par un point quelconque* P *du demi-diametre* CA (*prolongé s'il eſt néceſſaire*) *une droite parallèle à* CD, *laquelle rencontre les Hyperboles aux points* M, N ; *par leſquels & par le centre* C, *ſoient tirées les droites* CM, CN : *je dis que les Secteurs Hyperboliques* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *ſeront entr'eux, comme les demi-diametres conjugués* CB. CD. Fig. 117, 118.

On aura par la propriété * des deux Hyperboles AM, AN, ou BM, DN, ces deux proportions $\overline{PM}. \overline{CB} :: \overline{CP} \mp \overline{CA}. \overline{CA} :: \overline{PN}. \overline{CD}$. Et par conſéquent $\overline{PM}. \overline{PN} :: \overline{CB}. \overline{CD}$. Et en prenant les racines quarrées, $PM. PN :: CB. CD$. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la parallèle PMN, il s'enſuit * que les eſpaces Hyperboliques APM, APN, ou $CPMB, CPND$, ſont entr'eux comme CB eſt à CD. Mais les triangles CPM, CPN, ſont en- * *Art.* 81 & 118. * *Art.* 186.

tr'eux, comme leurs baſes PM, PN, (puiſqu'ils ſont ſitués entre les mêmes parallèles CD, PN), ou comme les demi-diametres conjugués CB, CD. Et par conſéquent (*fig.* 117.) $CB.CD :: CPM - APM. CPN - APN :: CAM. CAN$. Ou bien (*fig.* 118.) $CB.CD :: CPMB - CPM. CPND - CPN :: CBM. CDN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

216. SI les deux demi-diametres conjugués CA, CD, ſont égaux entr'eux, l'Hyperbole AN ou DN ſera équilatere. Et ſi l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Secteurs Hyperboliques CAN, ou CDN, on auroit auſſi la quadrature des Secteurs CAM, ou CBM, qui ont pour baſes des portions AM, ou BM d'une autre Hyperbole, dont le demi-diametre conjugué CB peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puiſque le rapport des Secteurs Hyperboliques CAM CAN, ou CDN, CBM, étant exprimé par les droites CD, CB, eſt donné. D'où l'on voit que ſi l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatere, on auroit auſſi celle de toutes les autres Hyperboles : de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipſes.

* *Art.* 212.

PROPOSITION VII.

Théorême.

FIG. 119. 217. SI *l'on prend ſur une aſymptote* CN *d'une Hyperbole* EBDF, *deux parties* CK, CL, *qui ſoient entr'elles en même raiſon que deux autres parties quelconques* CG, CH, *de la même aſymptote ; & qu'ayant mené les parallèles* GF, HD, KB, LE, *à l'autre aſymptote* CP, *leſquelles rencontrent l'Hyperbole aux points* F, D, B, E, *on tire les demi-diametres* CF, CD, CB, CE : *je dis que les deux Secteurs*

Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, *ſeront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites BD, EF, qui rencontrent les aſymptotes aux points M, O, N, P; les parallèles KB, HD, donneront cette proportion, $MB.\ MK :: DO.\ CH$. Les parallèles LE, GF, donneront auſſi cette autre proportion, $NE.\ NL :: FP.\ CG$. Et partant puiſque * $MB = DO$, & $NE = FP$, il s'enſuit que $MK = CH$, & $NL = CG$. Or par la ſuppoſition CG ou LN. CH ou $KM :: CK.\ CL ::$ *$LE.\ KB$. Et partant $LN.\ LE :: KM.\ KB$. Donc les lignes NE, MB, c'eſt-à-dire, les deux droites EF, BD, dont elles ſont parties, ſeront parallèles entr'elles. Donc * les Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, ſont égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit, &c.*

* *Art.* 95.

* *Art.* 100.

* *Art.* 209.

COROLLAIRE I.

218. SI les parties CK, CL, de l'aſymptote CN, ſont en même raiſon que deux parties quelconques CS, CT de l'autre aſymptote CP; & qu'on mene les parallèles KB, LE, à l'aſymptote CP, & les parallèles SD, TF, à l'autre aſymptote CN; il eſt clair que les Secteurs Hyperboliques CDF, CBE, ſeront auſſi égaux entr'eux. Car ayant mené les parallèles FG, DH, à l'aſymptote CP, on aura * $CG.\ CH :: HD$ ou $CS.$ GF ou CT * $:: CK.\ CL$. Donc, &c.

* *Art.* 100.

* *Hyp.*

COROLLAIRE II.

219. SI l'on prend ſur la même aſymptote la partie CK troiſieme proportionnelle à deux parties quelconques CG, CH; on prouvera par un raiſonnement ſemblable à celui du Théorême que la ligne BF eſt parallèle à la tangente qui paſſe par le point D; & qu'ainſi * les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, ſont égaux entr'eux. D'où il ſuit que ſi l'on prend ſur une aſymptote autant de parties qu'on voudra CG, CH, CK, CL, &c. en progreſſion géométrique continue, d'où

* *Art.* 210.

partent les parallèles GF, HD, KB, LE, &c. à l'autre asymptote, les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, CBE, &c. seront tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

220. DE-LA on voit que si CH est la premiere de deux moyennes géométriquement proportionnelles entre les extrêmes CG, CL; & qu'on tire les droites GF, HD, LE, parallèles à l'autre asymptote; le Secteur CDF, sera au Secteur CFE, comme 1 est à 3. De même, si CH est la premiere de trois moyennes proportionnelles entre CG, CL; le Secteur CDF sera au Secteur CFE, comme 1 est à 4. Et en général, si la lettre m marque un nombre entier quelconque, & que CH soit la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes CG, CL, que le nombre $m-1$ contient d'unités; le Secteur CDF, sera au Secteur CFE, comme i est au nombre m.

REMARQUE.

221. ON peut ici donner une idée fort exacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmétique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorsqu'il s'agit d'opérer sur de forts grands nombres. Voici comment :

Si l'on suppose que CG, exprime l'unité, & que CL étant decuple de CG, c'est-à-dire, 10, le Secteur Hyperbolique CFE, soit divisé en 10000000000 parties égales. Et si l'on compose une table divisée en deux colomnes, dont la premiere renferme de suite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui soient tels que CH, exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Secteur Hyperbolique CDF contient par rapport au nombre des parties que contient le Secteur

CFE ; les nombres artificiels ſeront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels auxquels ils répondent. Cela poſé,

1°. Si l'on propoſe de multiplier deux nombres naturels quelconques *CH*, *CK*, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs *CFD*, *CFB*, & ajoutant enſemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur *CFE*, vis-à-vis duquel ſera placé le nombre naturel *CL* produit de la multiplication des deux nombres *CH*, *CK*.

2°. Si l'on propoſe de diviſer le nombre *CL* par le nombre *CK*, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme *CFB* du Diviſeur *CK*, du Logarithme *CFE* du nombre à diviſer *CL*, pour avoir le Logarithme *CBE* ou *CFD* du quotient *CH*.

3°. Si l'on propoſe d'extraire une racine quelconque du nombre *CL*, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviſer ſon Logarithme *CFE* en trois parties égales, pour avoir le Logarithme *CFD*, vis-à-vis duquel eſt placé le nombre *CH*, qui eſt la racine cubique cherchée.

Tout cela eſt une ſuite de ce que les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CBE*, ſont égaux entr'eux, lorſque *CG*. *CH* :: *CK*. *CL*. Et que les Secteurs *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. ſont auſſi égaux entr'eux, lorſque *CG*. *CH* :: *CH*. *CK* :: *CK*. *CL* :: &c. Il eſt donc évident que par le moyen de cette table on pourra abréger extrêmement les opérations de l'Arithmétique, lorſqu'il s'agit d'opérer ſur de grands nombres, comme dans les calculs Aſtronomiques.

Comme l'on n'a pu juſqu'à préſent trouver en nombres exacts, le rapport des Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CFB*, &c. au Secteur *CFE*, on s'eſt contenté d'exprimer ce rapport en nombres fort approchans ; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les propriétés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Secteur CFE Logarithme de $CL(10)$ contient 10000000000 parties égales, on trouvera que le parallélogramme $CGFT$ contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque CBF, est au parallélogramme $CGFT$ à-peu-près comme le Logarithme du nombre CK trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caracteres outre la caractéristique.

PROPOSITION VIII.

Théorême.

FIG. 120. 222. *S'il y a sur chaque asymptote deux parties* CG, CL, & CR, CS, *qui soient telles que* $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[m]{CL} :: \sqrt[m]{CR}.\sqrt[m]{CS}$; *& qu'on tire les droites* GF, LE, RT, SV, *parallèles aux asymptotes : je dis que le Secteur* CFE, *sera au Secteur* CTV, *comme* m *est à* n. *Les lettres* m *&* n *marquent des nombres entiers quelconques.*

Car si l'on fait $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[m]{CL} :: CG.CH$. Et $\sqrt[m]{CR}.\sqrt[m]{CS} :: CR.CQ$. Et qu'on tire les droites HD, QN, parallèles aux asymptotes; il est clair que les Secteurs Hyperboliques CFD, CTN, seront égaux * entr'eux, puisque * $CG.CH :: CR.CQ$. Or selon la nature des Progressions géométriques, la ligne CH sera la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre CG & CL que le nombre $m-i$ contient d'unités, & de même la ligne CQ sera la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre CR & CS que le nombre $n-i$ contient d'unités. Donc * $CFE.CFD :: m.i$. Et CTN ou $CFD.CTV :: i.n$. Et par conséquent le Secteur CFE est au Secteur CTV en raison composée de m à i, & de i à n, c'est-à-dire, comme le nombre m est au nombre n. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 218.
* *Hyp.*
* *Art.* 220.

COROLLAIRE.

223. DE-LA on voit qu'un Secteur Hyperbolique CFE étant donné avec un point quelconque T de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point V de la même Hyperbole, tel que le Secteur CFE ſoit au Secteur CTV, comme m eſt à n, que prendre CS en ſorte que $\sqrt[n]{CG}.\sqrt[n]{CL} :: \sqrt[n]{CR}.\sqrt[n]{CS}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[n]{\overline{CG}}.\sqrt[n]{\overline{CL}} :: CR.CS$. C'eſt-à-dire, qu'il faut prendre $CS = CR \times \sqrt[n]{\frac{\overline{CL}}{\overline{CG}}}$.

PROPOSITION IX.

Théorême.

224. SI *l'on mene par les extrémités* B, F, *d'un Secteur Hyperbolique quelconque* CBF, *les droites* BK, FG, *parallèles à une aſymptote* CS, *& terminées par l'autre* CL; *je dis que le Secteur Hyperbolique* CBF *eſt égal à l'eſpace Hyperbolique* BKGF *compris entre les parallèles* BK, FG, *à une aſymptote* CS, *la partie* GK *de l'autre aſymptote* CL, *& la portion* BF *de l'Hyperbole.* FIG. 121.

Car ſi l'on retranche des triangles égaux * CKB, CGF, le même triangle CGA (le point A eſt le point d'interſection des deux droites FG, CB) & qu'on ajoute aux deux reſtes $BKGA$, CAF, le même eſpace hyperbolique BAF, on formera d'une part l'eſpace $BKGF$, & de l'autre le Secteur CBF qui ſeront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 99.

COROLLAIRE I.

225. SI l'on eut mené les lignes BQ, FO, parallèles à l'aſymptote CL, & terminées par l'aſymptote CS, on auroit prouvé de même que le Secteur Hyperbolique

CBF eſt égal à l'eſpace hyperbolique $BQOF$; d'où l'on voit que les eſpaces ou Trapeſes hyperboliques $BKGF$, $BQOF$, ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. DE-LA il eſt évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, ſe doit auſſi entendre de ces ſortes de Trapéſes; puiſqu'ils leur ſont égaux.

PROPOSITION X.

Théorême.

FIG. 122. 227. SOIENT *deux différentes Hyperboles* BMF, HND, *qui ayent les mêmes aſymptotes* CL, CS, *& ſoient menées par deux points quelconques* G, K, *d'une aſymptote deux parallèles* GDF, KHB, *à l'autre. Je dis que l'eſpace hyperbolique* HKGD *eſt à l'eſpace hyperbolique* BKGF, *comme la puiſſance de l'Hyperbole* HND, *eſt à la puiſſance de l'Hyperbole* BMF.

Car ayant mené par un point quelconque P de la partie GK, une parallèle aux deux droites GD, KH, laquelle rencontre l'Hyperbole BMF au point M, & l'Hyperbole HND au point N; & nommé la puiſſance de l'Hyperbole HND, aa; celle de l'Hyperbole BMF, bb; & l'indéterminée CP, x; on aura * $PN=\frac{aa}{x}$, & $PM=\frac{bb}{x}$; & partant $PN.PM::aa.bb$.

* *Art.* 101.

Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la partie GK que tombe le point P; il s'enſuit * que l'eſpace hyperbolique $HKGD.BKGF::aa.bb$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 186.

COROLLAIRE.

228. LORSQUE les puiſſances des Hyperboles HND, BMF, ſont entr'elles, comme le nombre m eſt au nom-

bre n ; on pourra toujours trouver dans l'Hyperbole HND un Trapéſe hyperbolique $RSVT$ égal à un Trapéſe hyperbolique $GKBF$ de l'autre BMF, les droites CG, CK, CR, étant données. Car il eſt clair * que le Trapéſe $GKHD$ eſt au Trapéſe $GKBF$, comme m eſt à n ; & qu'ainſi toute la difficulté ſe réduit à trouver dans la même Hyperbole HND, le Trapéſe $RSVT$, qui ſoit au Trapéſe $GKHD$, comme le nombre n eſt au nombre m : & c'eſt ce qui ſe fera * en prenant CS, telle que $\sqrt[n]{CG} . \sqrt[n]{CK} :: CR . CS$.

* *Art.* 222 & 225.

* *Art.* 223 & 226.

DÉFINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie AC, qui ait pour origine le point fixe A ; & ſoit une ligne courbe AMB telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M une droite MP qui faſſe avec AC un angle donné APM & ayant nommé les indéterminées AP, x ; PM, y ; on ait toujours $ax = yy$ (la lettre a marque une ligne donnée) : il eſt clair * dans cette ſuppoſition que la ligne courbe AMB eſt une Parabole qui a pour diametre la ligne AC, pour une ordonnée à ce diametre la droite PM, & pour parametre de ce diametre la donnée a. Mais ſi l'on ſuppoſe à préſent que la nature de la courbe AMB ſoit exprimée par l'équation $y^3 = aax$, ou par cette autre $y^3 = axx$; cette ligne courbe ſera nommée *Parabole cubique* ou *du troiſieme degré* ; parce que celle des deux indéterminées x ou y, dont la puiſſance eſt la plus élevée, monte au troiſieme degré. De même ſi l'équation eſt $y^4 = a^3 x$, ou $y^4 = a x^3$; la ligne courbe AMB eſt appellée *Parabole du quatrieme degré* ; parce que l'indéterminée y dont la puiſſance eſt la plus haute, monte au quatrieme degré. Il en eſt ainſi de toutes les autres à l'infini.

FIG. 123.

* *Art.* 195.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite AC qui ait pour origine le point fixe A ; & ſoit

FIG. 124.

une ligne courbe BM, telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP qui faſſe avec AC un angle donné APM, & ayant nommé AP, x; PM, y; on ait toujours $xy = aa$ (la lettre a marque une ligne donnée) : il eſt clair * que cette ligne courbe ſera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ſes aſymptotes la ligne AC, & pour l'autre, la ligne AD parallèle à PM, & dont la puiſſance ſera le quarré aa. Mais ſi l'équation qui exprime la nature de la courbe BM eſt $xxy = a^3$; cette ligne courbe ſera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troiſieme degré*, parce que le produit xxy des deux indéterminées x & y, a trois dimenſions. De même, ſi l'équation étoit $x^3y = a^4$; la ligne courbe BM ſeroit une *Hyperbole du quatrieme degre*; parce que le produit x^3y a quatre dimenſions. Il en eſt ainſi de toutes les autres à l'infini.

* *Art.* 101.

COROLLAIRE.

Fig. 123, 124.

229. SI l'on ſuppoſe que la lettre m marque un nombre entier quelconque qui ſoit l'expoſant de la puiſſance de l'indéterminée AP (x); & de même que la lettre n marque l'expoſant de la puiſſance de l'autre indéterminée PM (y): il eſt clair que l'équation $y^n = x^m \times a^{n-m}$ (ou ſimplement $y^n = x^m$, en faiſant pour abréger la donnée $a = 1$) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ (ou ſimplement $x^m y^n = 1$, en faiſant $a = 1$) exprime en général la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

COROLLAIRE II.

230. SI l'on mene par l'origine fixe A de la ligne AC une ligne droite indéfinie AD parallèle à PM; & qu'ayant tiré MK parallèle à AC, qui rencontre AD au point K, on nomme les indéterminées AK, x; KM, y;

il

il eſt clair que l'indéterminée x qui exprimoit auparavant la ligne AP ou MK, devient à préſent y; & qu'au contraire y qui exprimoit PM ou AK, devient à préſent x. D'où il ſuit:

1°. Que ſi la courbe AMB eſt une Parabole ordinaire, elle aura pour équation $yy=ax$ ou $xx=ay$, ſelon qu'on rapportera ſes points à ceux de la ligne AC ou AD; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3=aax$ lorſqu'on rapporte ſes points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^3=aay$ lorſqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD; & en général que ſi la ligne courbe AMB a pour équation $y^n=x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite AC, cette même courbe aura pour équation $x^n=y^m a^{n-m}$ (l'on ſuppoſe que n ſurpaſſe m) étant rapportée à la ligne AD. FIG. 123.

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toujours la même équation $xy=aa$, ſoit qu'on la rapporte à la ligne AC ou à la ligne AD; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxy=a^3$ étant rapportée à AC, aura pour équation $xyy=a^3$ étant rapportée à l'autre ligne AD; & en général que l'Hyperbole qui a pour équation $x^m y^n=a^{m+n}$ lorſqu'on rapporte ſes points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^n y^m=a^{m+n}$ lorſqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD. FIG. 124.

COROLLAIRE III.

231. DE-LA il eſt évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3=aax$ ou $x^3=aay$, & l'autre $y^3=axx$ ou $x^3=ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une ſeule Hyperbole cubique $xxy=a^3$ ou $xyy=a^3$. Car les indéterminées x & y ne peuvent être combinées que des quatre premieres manieres pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troiſieme degré; & des deux ſecondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premieres égalités appartiennent à deux différentes courbes, & les deux ſecondes à la même; il s'enſuit, &c. On peut trouver par la même

voie le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatrieme, cinquieme degré, &c.

COROLLAIRE IV.

FIG. 124. 232. NON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour aſymptotes les lignes droites indéfinies AC, AD; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car ſoit l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorſqu'on rapporte ſes points à ceux de la ligne AC; il eſt manifeſte que plus AP (x) augmente, plus au contraire y^n, & par conſéquent PM (y) diminue; de ſorte que x étant infiniment grande, PM (y) devient nulle ou zéro : c'eſt-à-dire que l'Hyperbole BM & la ligne AC, étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toujours de plus en plus juſqu'à ce qu'enfin elles ſe joignent dans l'infini même; ce qui conſtitue l'eſſence d'une aſymptote. Maintenant ſi l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne AD, on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il ſuit que plus AK (x) devient grande, plus au contraire KM (y) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainſi la ligne AD eſt encore une aſymptote de la même Hyperbole.

PROPOSITION XI.

Problême.

FIG. 123. 233. SOIT *propoſé de mener d'un point donné* M *ſur la ſeconde Parabole cubique* AMB, *dont la nature eſt exprimée par l'équation* $y^3 = axx$, *la tangente* MT.

Ayant ſuppoſé l'arc MN infiniment petit, & mené NQ parallèle à PM, & MR parallèle à AC: le petit triangle MRN ſera ſemblable au grand TPM; puiſque le

petit arc MN peut être regardé * comme la prolongation de la tangente TM. Cela posé, on nommera la soutangente cherchée TP, s; & la petite droite PQ ou MR, e; ce qui donnera $RN = \frac{ey}{s}$, à cause des triangles semblables TPM, MRN. Or si l'on met le cube de $QN\left(y+\frac{ey}{s}\right)$ à la place de y^3 dans l'équation $y^3 = axx$ qui exprime la nature de la courbe AMB; & à la place de xx, le quarré de $AQ\,(x+e)$: il est évident qu'on formera une équation $y^3 + \frac{3ey^3}{s} + \frac{3eey^3}{ss} + \frac{e^3y^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette dernière équation ceux de la premiere, & qu'on divise ensuite par e, on trouvera $\frac{3y^3}{s} + \frac{3ey^3}{ss} + \frac{eey^3}{s^3} = 2ax + ea$; dans laquelle effaçant tous les termes où e se rencontre, parce que $PQ\,(e)$ étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin $\frac{3y^3}{s} = 2ax$; & partant $PT\,(s) = \frac{3y^3}{2ax} = \frac{3}{2}x$ en mettant pour y^3 sa valeur axx. *Ce qu'il falloit trouver.*

* *Art.* 189.

REMARQUE.

234. SI l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de y, une pareille puissance de $y+\frac{ey}{s}$, on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de e, ils renferment chacun e, ou des puissances de e, dans la derniere équation que l'on trouve à la fin de l'opération; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de même lorsqu'on substitue à la place de la puissance de x, une pareille puissance de $x+e$. Mais si l'on forme de suite

toutes les puiſſances du binome $x+e$, on aura pour les deux premiers termes de la ſeconde puiſſance x^2+2ex; de la troiſieme x^3+3exx; de la quatrieme x^4+4ex^3; de la cinquieme x^5+5ex^4; & ainſi de ſuite à l'infini. De ſorte que les deux premiers termes d'une puiſſance quelconque m de $x+e$, ſeront x^m+mex^{m-1}. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puiſſance quelconque n du binome $y+\frac{ey}{s}$, ſeront $y^n+\frac{neyn}{s}$.

COROLLAIRE.

235. DE-LA on voit que pour trouver une expreſſion générale de la ſoutangente PT (s) des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à ſe ſervir de l'équation générale $y^n=x^m a^{n-m}$, ou (prenant a pour l'unité) $y^n=x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation générale $y^n=x^m$ à la place de y^n, les deux premiers termes de la puiſſance n de $y+\frac{ey}{s}$, c'eſt-à-dire, $y^n+\frac{neyn}{s}$; & de même à la place de x^m, les deux premiers termes de la puiſſance m de $x+e$, c'eſt-à-dire, x^m+mex^{m-1}: ce qui donnera $y^n+\frac{neyn}{s}=x^m+mex^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la premiere équation de ceux de celle-ci, & diviſant enſuite par e, l'on aura $\frac{nyn}{s}=mx^{m-1}$; & partant $s=\frac{nyn}{mx^{m-1}}=\frac{n}{m}x$ en mettant pour y^n ſa valeur x^m.

PROPOSITION XII.

Problême.

FIG. 124. 236. MENER *les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.*

La même préparation étant faite que dans la propo-

ſition précédente, on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de $AP\,(x)$ à $PM\,(y)$, à la place de x^m les deux premiers termes de la puiſſance m de $AQ\,(x+e)$ c'eſt-à-dire, $x^m + m\,e\,x^{m-1}$; & de même à la place de y^n les deux premiers termes de la puiſſance n de $QN\left(y - \frac{ey}{s}\right)$ c'eſt-à-dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$: ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + m\,e\,y^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneeey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et retranchant par ordre des deux membres de cette dernière équation, ceux de la premiere; & diviſant enſuite par ey^n; il vient $m\,x^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mnex^{m-1}}{s} = o$; dans laquelle équation effaçant le terme $- \frac{mnex^{m-1}}{s}$ qui eſt nul par rapport aux deux autres, parce qu'il renferme dans ſon expreſſion la ligne infiniment petite ou nulle $PQ\,(e)$, on trouve en tranſpoſant à l'ordinaire $PT\,(s) = \frac{nx^m}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$.

COROLLAIRE.

237. IL eſt donc évident que pour mener la Tangente MT d'un point donné M ſur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra; dont l'équation eſt pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$: il ne faut que prendre la ſoutangente $PT = \frac{n}{m}AP$ du même côté du point A par rapport au point P, lorſque c'eſt une Parabole; & du côté oppoſé, lorſque c'eſt une Hyperbole. FIG. 113, 114.

PROPOSITION XIII.

Théorême.

FIG. 125. 238. SOIT *comme dans la définition quatrieme, une Parabole* AMB *de tel degré qu'on voudra, dont la nature eſt exprimée par l'équation* $y^n = x^m a^{n-m}$: *ſoit menée d'un de ſes points quelconques* B *la droite* BC *qui faſſe avec* AC *l'angle donné* ACB, *& ſoit achevé le parallélogramme* ACBD. *Je dis que le parallelogramme circonſcrit* ACBD *eſt à l'eſpace Parabolique* ACBMA *compris par les droites* AC, CB, *& par la portion de Parabole* AMB; *comme* m + n *eſt à* n.

Il faut prouver que ACBD. ACBMA :: m + n. n.

Ayant ſuppoſé ſur la portion de la Parabole *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, ou ſi l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'eſt-à-dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, ſi petite qu'elle puiſſe être; & mené les droites *MP*, *NQ*, parallèles à *BC*; & *MK*, *NL*, parallèles à *AC*; leſquelles forment par leurs rencontres le petit parallélogramme *MRNS*: on tirera la tangente *MT* qui rencontre le diametre *AC* au point *T*, par où l'on menera une parallèle à *CB*, qui rencontre les lignes *MK*, *NL*, aux points *F*, *G*. Cela fait, * *Art.* 189. on regardera * le petit arc *MN* comme l'un des petits côtés du Polygone qui compoſe la portion de Parabole *AMB*, & la tangente *MT* comme le prolongement de ce petit côté; de ſorte que l'on a deux triangles rectilignes *NRM*, *MPT*, qui ſont ſemblables: c'eſt pourquoi *NR* ou *MS*. *RM*:: *MP*. *PT* ou *MF*. Et partant le parallélogramme *PMRQ* eſt égal au parallélogramme *FMSG*; puiſque les angles *PMR*, *FMS*, ſont égaux, & que les côtés autour de ces angles ſont réciproquement proportionnels. * *Art.* 137. Or * MF ou $PT = \frac{n}{m} AP$ ou $\frac{n}{m} MK$. Donc auſſi le parallélogramme $FMSG$ ou ſon égal $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Et comme cela arrive toujours en quel-

que endroit de la portion de Parabole AMB que tombe le petit arc MN ; il s'enſuit que la ſomme de tous les petits parallélogrammes $PMRQ$, c'eſt-à-dire, * le Triligne parabolique $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$ ſomme de tous les petits parallélogramme $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $ADBMA. ACBMA :: m. n$. Et par conſéquent $ADBMA + ACBMA$ ou $ACBD. ACBMA :: m + n. n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE.

239. DE-LA il eſt évident que le Triligne parabolique APM eſt au parallélogramme circonſcrit $APMK$, comme n eſt à $m + n$: & qu'ainſi le Trapeſe parabolique $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$; puiſque $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$, & $APM = \frac{n}{m+n} APMK$.

PROPOSITION XIV.

Théorême.

240. SOIT *comme l'on a expliqué dans la définition cinquieme, une Hyperbole* BMO *de tel degré qu'on voudra, dont la nature eſt exprimée par l'équation* $x^m y^n = a^{m+n}$: *ſoit menée d'un de ſes points quelconques* B *la ligne* BC *parallèle à l'une des aſymptotes* AD, *& terminée par l'autre en* C ; *& ſoit achevé le parallélogramme* ACBD. *Je dis que ce parallélogramme* ACBD *eſt à l'eſpace hyperbolique* ECBMO *renfermé par la droite déterminée* BC, *par la ligne* CE *prolongée à linfini du côté de* E, *& par la portion d'Hyperbole* BMO, *prolongée auſſi à l'infini du côté de* O ; *comme* m — n *eſt à* n. FIG. 126.

Il faut prouver que ACBD. ECBMO :: m — n. n.

La même préparation étant faite que dans la propoſition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallélogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$.

Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole BMO que tombe le petit arc MN; il s'enſuit que la ſomme de tous les petits parallélogrammes $PMRQ$, c'eſt-à-dire, * l'eſpace $ECBMO = \frac{n}{m} EADBMO$ ſomme de tous les petits parallélogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $EADBMO. ECBMO :: m. n$; & partant $EADBMO — ECBMO$, ou $ACBD. ECBMO :: m — n. n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE I.

241. DE-LA il eſt évident que le Trapéſe hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puiſque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raiſon l'eſpace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

COROLLAIRE II.

242. DE-LA il ſuit :

1°. Que lorſque m ſurpaſſe n; le rapport du parallélogramme inſcrit $ACBD$ à l'eſpace $ECBMO$ indéfiniment étendu du côté de E, ſera toujours exprimé par des nombres poſitifs; & qu'ainſi on aura toujours dans ce cas la quadrature abſolue de cet eſpace.

2°. Que lorſque $m = n$, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallélogramme $ACBD$ eſt à l'eſpace hyperbolique $ECBMO$, comme zéro eſt à l'unité : c'eſt-à-dire que cet eſpace eſt infini par rapport au parallélogramme inſcrit $ACBD$.

3°. Que lorſque m eſt moindre que n; le parallélogramme inſcrit $ACBD$ ſera à l'eſpace hyperbolique $ECBMO$ comme un nombre négatif à un nombre poſitif : ce qui fait voir alors que la raiſon de cet eſpace au parallélogramme $ACBD$, eſt pour ainſi dire plus qu'infinie. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que

que l'eſpace hyperbolique renfermé par la droite DB, par l'aſymptote AD prolongé à l'infini du côté de D, & par l'Hyperbole OMB auſſi prolongée à l'infini du côté de B, ſera au parallélogramme inſcrit $ACBD$, comme m eſt à $n-m$, c'eſt-à-dire, que cet eſpace ſera quarrable; car prenant les indéterminées (x) ſur l'aſymptote AD, au lieu qu'on les avoit priſes ſur l'aſymptote AC, l'équation à l'Hyperbole deviendra * $x^n y^m = a^{m+n}$. * *Art.* 230.

PROPOSITION XV.

Théorême.

243. SOIT *dans l'angle droit* CAD *une ligne courbe quelconque* AMB, *dont l'on ſçache mener les tangentes* MT; *& ſoit dans l'angle* DAH *qui eſt à côté de celui-ci, une autre ligne courbe* HFE, *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* F *la ligne* FM *parallèle à* AC, *qui rencontre en* K *la ligne* AD, *& en* M *la premiere courbe* AMB, *& ayant tiré la tangente* MT *qui rencontre* AC *au point* T: *on ait toujours comme* AK *eſt à* MT, *ainſi une ligne conſtante* a *qui demeure toujours la même en quelque endroit que tombe le point* F, *eſt à* KF. *Je dis que ſi par un point quelconque* D *de la ligne* AD *l'on mene une ligne droite* EB *parallèle à* AC *& terminée par les deux courbes; l'eſpace* ADEFH *ſera égal au rectangle de la courbe* AMB *par la conſtante* a. FIG. 127.

Il faut prouver que ADEFH = AMB × a.

Ayant ſuppoſé par-tout où l'on voudra ſur la courbe AMB l'arc MN infiniment petit, & mené les droites MF, NG, parallèles à AC, & qui rencontrent la droite AD aux points K, L, & la courbe HFE aux points F, G, on tirera les droites FS, MR, parallèles à AD, & on prolongera RM juſqu'à ce qu'elle rencontre AC en P. Cela poſé, les deux triangles rectangles ſemblables MPT, MRN, donnent $MR.\ MN :: MP$ ou $AK.\ MT :: a.\ KF$. Et partant $KF \times MR$, c'eſt-à-dire,

le petit rectangle $FKLS = MN \times a$. Or comme cela arrive toujours en quelqu'endroit de la Courbe AMB qu'on prenne le petit arc MN, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits rectangles $KLSF$, c'eſt-à-dire, * l'eſpace $ADEFH$ ſera égal à la ſomme de tous les petits rectangles $MN \times a$, c'eſt-à-dire, au rectangle de la courbe AMB par la conſtante a. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE I.

244. DE-LA il eſt évident que le rectangle de la portion AM par la conſtante a, eſt égal à l'eſpace $AKFH$; & de même que le rectangle de la portion MB par la même ligne a, eſt égal à l'eſpace $KDEF$.

COROLLAIRE II.

245. SI l'on ſuppoſe que la Courbe AMB ſoit la ſeconde Parabole cubique, qui ait pour équation $y^3 = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{3}{2}x$; & à cauſe du triangle rectangle MPT, l'hypothénuſe $MT = \sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$. Mais par la propriété de la Courbe HFE, il faut que $MP\,(y).\ MT\,(\sqrt{yy+\frac{9}{4}xx}) :: a.\ KF$. Ce qui donne $\overrightarrow{KF} = aa + \frac{9aaxx}{4yy} = aa + \frac{9}{4}ay$, en mettant pour axx ſa valeur y^3. D'où l'on voit que la Courbe HFE eſt dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne AD, dont l'origine eſt au point O, pris de l'autre côté du point D par rapport au point A, en ſorte que $AO = \frac{4}{9}a$, & dont le parametre $= \frac{9}{4}a$: car par la propriété de cette Parabole * le quarré de l'ordonnée KF ſera égal au rectangle de KO par le parametre $\frac{9}{4}a$, c'eſt-à-dire en termes analytiques, $\overrightarrow{KF} = aa + \frac{9}{4}ay$. Or comme les Trapeſes paraboliques $ADEH$, $AKFH$, ſont * quarrables, il s'enſuit qu'on a la rectification tant de la Courbe AMB, que d'une de ſes portions quelconques AM.

* *Art.* 233.

* *Art.* 19.

* *Art.* 239.

Si l'on veut exprimer au juſte la valeur de la portion AM, on remarquera que AH eſt $= a$; puiſque $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{2}{3}a = aa$. Ainſi ayant nommé la tangente MT, t; la ligne AK ou MP, y ; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapeſe parabolique $FKAH$ ou * $\frac{2}{3}FK \times KO - \frac{2}{3}HA \times AO$ * *Art.* 239.
$= \frac{2}{3}at + \frac{8aat}{27y} - \frac{8}{27}aa = AM \times a$. C'eſt-à-dire en diviſant par a, que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3}t + \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Ce qui donne cette conſtruction.

Ayant mené du point donné M ſur la ſeconde Parabole cubique AMB, la tangente MT qui rencontre en Q la ligne AK menée par l'origine A de l'axe AC perpendiculairement à cet axe, on prendra ſur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27}a$; & ayant tiré VC parallèle à MT qui rencontre l'axe en C, on décrira du centre V & du rayon VA un arc de cercle qui coupe VC en X. Je dis que la portion AM de la ſeconde Parabole cubique AMB ſera égale à la ſomme des deux droites MQ, CX.

Car à cauſe des triangles ſemblables TPM, TAQ ; il eſt clair que $MQ = \frac{2}{3}MT(t)$, puiſque $AP = \frac{2}{3}PT$; & à cauſe des triangles ſemblables MPT, VAC, il vient $MP(y).\ MT(t) :: AV\left(\frac{8}{27}a\right).\ VC = \frac{8at}{27y}$, & partant $CX = \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Donc, &c.

PROPOSITION XVI.

Théorême.

246. Soit *une Hyperbole équilatere* EAF, *qui ait pour centre le point* C, *& pour la moitié de ſon premier* Fig. 128.

axe la droite CA ; *avec une Parabole* NCS *qui ait pour axe la ligne* AC *prolongée du côté de* C *qui en ſera l'origine, & pour parametre de l'axe une ligne double de* CA. *Si l'on mene par un point quelconque* N *de la Parabole* NCS, *une parallèle* NE *à* CA, *qui rencontre l'Hyperbole* EAF *au point* E, *& ſon ſecond axe* CL *au point* L ; *je dis que l'eſpace hyperbolique* CLEA *renfermé entre les droites* AC, CL, LE, *& la portion* EA *de l'Hyperbole, eſt égal au rectangle de la portion* CN *de la Parabole par la droite* AC.

Ayant mené par un point quelconque M de la portion CN de la Parabole, une perpendiculaire MG à la tangente MT qui paſſe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points G, T ; & une parallèle MB à CA, qui rencontre l'Hyperbole en B, & ſon ſecond axe CL en H : les lignes MG, HB, ſeront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée MP à l'axe on aura * $PG = CA$; & à cauſe du triangle rectangle MPG, le quarré $\overline{MG} = \overline{PM} + \overline{PG} = \overline{CH} + \overline{CA}$ = * $\overline{HB}$, à cauſe de l'Hyperbole équilatere EAF ; & partant $MG = HB$. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent MP ou CH. MT :: PG ou CA. MG ou HB. Donc *, &c.

* *Art.* 24.

* *Art.* 127.

* *Art.* 143.

COROLLAIRE I.

247. DE-LA il eſt évident que le Trapeſe hyperbolique $HLEB$ eſt égal au rectangle de la portion de Parabole MN par la moitié CA du parametre de ſon axe.

COROLLAIRE II.

248. SI l'on mene dans l'Hyperbole équilatere EAF deux parallèles quelconques BD, EF ; & qu'on tire par leurs extrêmités des lignes droites BM, EN, DR, FS, parallèles à AC, leſquelles rencontrent le ſecond axe de l'Hyperbole aux points H, L, K, O ;

la différence des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale (en tirant les droites BE, DF,) à la différence des Trapeſes rectilignes $HLEB$, $KOFD$.

Car le rectangle $AC \times MN$ eſt égal * au Trapeſe hyperbolique $HLEB$; & par conſéquent le rectangle $AC \times MN$ plus le ſegment hyperbolique BE ſera égal au Trapeſe rectiligne $HLEB$: de même le rectangle $AC \times RS$ plus le ſegment hyperbolique DF ſera égal au Trapeſe rectiligne $KOFD$. Donc puiſque les deux ſegmens hyperboliques EB, DF, ſont * égaux entr'eux, la différence des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale à la différence des Trapeſes rectilignes $HLEB$, $KOFD$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 247.

* *Art.* 204.

COROLLAIRE III.

249. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précédent ; ſi l'on fait $2AC.\ LH :: BH+LE.\ m.$ il eſt clair que le rectangle $AC \times m = \frac{1}{2}LH \times \overline{BH+LE}$, c'eſt-à-dire, égal au Trapeſe rectiligne $HLEB$. De même ſi l'on fait $2AC.\ KO :: KD+FO.\ n.$ il eſt clair que $AC \times n$ eſt égal au Trapeſe rectiligne $KOFD$. Par conſéquent * la différence des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale à la différence des rectangles $AC \times m$, $AC \times n$, c'eſt-à-dire, en diviſant par AC, que la différence des arcs paraboliques MN, RS, ſera égale à la différence des droites m, n. D'où l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la différence d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que MN, RS.

* *Art.* 248.

LIVRE SIXIEME.

Des Sections Coniques conſidérées dans le Solide.

CHAPITRE PREMIER.

Des trois Sections Coniques en général.

DÉFINITIONS.

1.

Fig. 129. SI par un point fixe S élevé au-deſſus du plan d'un cercle VXY, on fait mouvoir une ligne droite SZ indéfiniment prolongée de part & d'autre du point S, autour de la circonférence du cercle, en ſorte qu'elle faſſe un tour entier; les deux ſurfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie SZ dans ce mouvement, ſont appellées chacune ſéparément *Surface Conique*, & toutes deux enſemble *Surfaces Coniques oppoſées.*

2.

Le point fixe S qui eſt commun à l'une & à l'autre Surface Conique, eſt nommé *Sommet.*

3.

Le Cercle VXY, *Baſe.*

4.

Le Solide compris par la baſe VXY, & par la portion de la Surface Conique que cette baſe coupe depuis le Sommet S, eſt appellé *Cone.*

5.

La ligne SX menée du Sommet S à un point quelconque X de ſa baſe, en eſt un des *Côtés.*

6.

La ligne SO menée du Sommet S du Cone par le centre O de la baſe, en eſt *l'Axe.*

7.

On dit qu'un Cone eſt *droit*, lorſque ſon axe eſt per-

pendiculaire ſur le plan de ſa baſe ; & au contraire qu'il eſt *ſcalene*, lorſque ſon axe eſt oblique ſur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan FAG qui ne paſſe point par le Sommet S, & qui ne ſoit point parallèle au plan de la baſe VXY ; la ligne courbe FAG formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, eſt appellée *Section Conique.* FIG. 130, 131, 132.

9.

Si l'on mene par le Sommet S d'un Cone, un plan SDE parallèle au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie DE formée par la rencontre de ce plan avec celui de la baſe du Cone, s'appellera *Directrice.*

10.

Une Section Conique FAG eſt appellée *Parabole*, lorſque la Directrice DE touche le cercle qui eſt la baſe du Cone : *Ellipſe*, lorſqu'elle tombe toute entiere au dehors : & *Hyperbole*, lorſqu'elle le traverſe.

Mais dans ce dernier cas, ſi l'on prolonge le plan de la Section, il eſt viſible qu'il rencontrera la Surface Conique oppoſée ; & la ligne courbe KMH formée par cette rencontre, ſera nommée *Hyperbole oppoſée* à la premiere FAG ; & les deux enſemble, *Hyperboles ou Sections oppoſées.* FIG. 132.

11.

Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne droite qui ne la rencontre qu'en un ſeul point, & qui étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entiere au dehors ; cette ligne ſera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Section, point *d'Attouchement.* FIG. 130, 131, 132.

COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone étant prolongés indéfiniment, rencontreront néceſſairement ſon plan, excepté le ſeul côté SD tiré du Sommet S. FIG. 130.

par le point D où la Directrice DE touche la baſe ; puiſqu'il n'y a que ce côté qui ſoit dans le plan SDE parallèle à celui de la Section, & que tous les autres le coupent dans le point S. D'où il eſt clair que la Parabole s'étend à l'infini, & ne rentre point en elle-même.

COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. DANS l'Ellipſe tous les côtés du Cone étant prolongés, s'il eſt néceſſaire, rencontrent ſon plan ; puiſque le plan SDE qui lui eſt parallèle, eſt rencontré par tous dans le point S. D'où l'on voit qu'elle renferme un eſpace en rentrant en elle-même.

COROLLAIRE III.

FIG. 132. 252. DANS les Hyperboles oppoſées tous les côtés du Cone excepté les deux SD, SE, tirés du Sommet S aux points D, E, où la Directrice coupe la baſe, étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet S, rencontrent néceſſairement leur plan ; puiſqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan SDE parallèle au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les autres le coupent dans le point S. Les côtés de la portion $SDVE$ forment les points de l'Hyperbole FAG, & ceux de la portion $SDVE$ étant prolongés de l'autre côté du Sommet S, forment les points de ſon oppoſée KMH. D'où l'on voit que les Hyperboles oppoſées s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles-mêmes, non plus que la Parabole.

PROPOSITION I.

Théorême.

FIG. 132. 253. *SI l'on coupe deux ſurfaces Coniques oppoſées, par un plan* Sam *qui, paſſant par leur Sommet* S, *entre au dedans ;*

dedans ; je dis qu'il formera par ſa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites Sa, Sm, *indéfiniment prolongées de part & d'autre du point* S.

Car ſoit *a m* la commune Section du plan coupant, & du plan de la baſe : il eſt clair qu'elle rencontrera cette baſe en deux points *a*, *m* ; puiſque par la ſuppoſition le plan *S a m* entre au dedans de la ſurface Conique. Or ſi l'on mene les côtés *S a*, *S m*, indéfiniment prolongés de part & d'autre du Sommet *S* ; il eſt évident par la génération des Surfaces Coniques oppoſées que ces côtés ſeront les deux communes Sections de ces deux Surfaces, avec le plan coupant *S a m*. *C'eſt ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne *a m* qui joint les deux points *a*, *m*, de la circonférence, tombe au dedans de la baſe, & que tout le reſte de cette ligne tombe au dehors ; il s'enſuit que ſi l'on conçoit que le plan *S a m* ſoit indéfiniment étendu tout autour du Sommet *S*, la partie de ce plan qui ſera renfermée dans l'angle *a S m*, & dans ſon oppoſé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques oppoſées, & que tout le reſte de ce plan tombera entre ou (ce qui eſt la même choſe) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LA il ſuit que ſi l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, d'une Section Conique par une ligne droite, elle ſera renfermée au dedans de la Section ; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entiere au dehors. Car menant du Sommet *S* par les points *A*, *M*, les côtés *S a*, *S m*, & faiſant paſſer un plan par ces côtés ; il eſt clair que la ligne *A M* tombe dans la partie de ce plan qui eſt renfermée dans l'angle *a S m*, & que tout le reſte FIG. 130.

de cette ligne ſe trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

COROLLAIRE III.

256. SI l'on mene par le Sommet S du cone une ligne parallèle à une ligne AM terminée par une Section Conique ; il eſt clair par le Corollaire précédent que cette ligne SH, tombera dans l'un des angles à côté de l'angle aSm, c'eſt-à-dire au dehors de la Surface Conique ; & qu'ainſi elle ira rencontrer le plan de la baſe en quelque point hors la circonférence du cercle, ou bien qu'elle lui ſera parallèle.

COROLLAIRE IV.

FIG. 132. 257. IL ſuit encore du Corollaire premier que ſi l'on joint deux points quelconques A, M, de deux Hyperboles oppoſées par une ligne droite, elle ſera renfermée entre ces Hyperboles ; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet S les côtés Sa, Sm, qui paſſent par les points A, M, & faiſant paſſer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point S ; il eſt clair que la partie de ce plan qui eſt renfermée dans l'angle ASM où tombe la ligne AM, eſt compriſe entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui eſt renfermée entre les deux angles à côté où ſe trouvent les prolongemens de la ligne AM, tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne AM eſt la commune Section du plan Sam avec celui des deux Hyperboles oppoſées, il s'enſuit, &c.

COROLLAIRE V.

258. IL ſuit auſſi des Corollaires deuxieme & quatrieme, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une

Section Conique, ou les deux Hyperboles oppoſées, au plus qu'en deux points.

PROPOSITION II.

Théorême.

259. SI *l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques oppoſées, par un plan* ovxy *parallèle à la baſe* OVXY : *je dis que la Section qu'il forme par ſa rencontre avec la Surface Conique, eſt un cercle qui a pour centre le point* o, *où ce plan rencontre l'axe* SO, *prolongé de l'autre côté du Sommet* S, *lorſqu'il eſt néceſſaire.* FIG. 129.

Car ſi l'on mene par un point quelconque X de la baſe au centre O le rayon XO, & au Sommet S le côté XS qui rencontre le plan $ovxy$ au point x : les lignes OX, ox, ſeront parallèles entr'elles ; puiſqu'elles ſont les communes Sections de deux plans parallèles $OVXY$, $ovxy$, par le même plan SOX prolongé, s'il eſt néceſſaire de l'autre côté du Sommet S. Les triangles OSX, oSx, ſeront donc ſemblables ; & par conſéquent on aura toujours $SO.\ OX :: So.\ ox$. Or les premiers termes de cette proportion étant par-tout les mêmes, le quatrieme ox ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point x. D'où l'on voit que la ligne courbe vxy eſt la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point o.

COROLLAIRE.

260. IL ſuit de-là qu'on peut placer la baſe d'un cone en tel endroit qu'on veut, ſelon qu'il eſt plus commode. C'eſt pourquoi lorſque la Section eſt une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en ſorte qu'elle coupe la Section ; mais lorſque c'eſt une Ellipſe, on la place tantôt de maniere qu'elle la coupe, & tantôt de maniere qu'elle tombe au-deſſous.

PROPOSITION III.

Théorême.

FIG. 130. 261. SI *dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ſes points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite indefinie* AB *parallèle au côté* SD *qui paſſe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la baſe ; je dis que cette ligne* AB *tombe toute entiere au dedans de la Section ; & qu'elle ne le rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de* B.

Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, & par la ligne *AB* un plan *SAB*, il formera par ſa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un ſera toujours la ligne *SD*, puiſque *AB* lui eſt parallèle ; & l'autre la ligne *Sa* qui paſſe par le point *A*. Or le plan *DSa* renfermé entre les côtés *SD*, *Sa*, prolongés à
* *Art.* 254. l'infini du côté de *D* & *a*, tombe * au dedans de la Surface Conique. Par conſéquent la ligne *AB* qui eſt toujours dans ce plan, étant parallèle au côté *SD*, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers *B*.

PROPOSITION IV.

Théorême.

FIG. 130. 262. SI *dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ſes points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite* AM *qui ne ſoit point parallèle au côté* SD, *qui paſſe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la baſe : je dis que cette ligne etant prolongee autant qu'il ſera néceſſaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point* M.

Car ſi l'on fait paſſer par le Sommet *S* du cone & par cette ligne un plan *SAM*, il eſt clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne paſſe point par

le côté SD; d'où il ſuit que ce plan forme ſur la Surface Conique * deux côtés Sa, Sm, dont l'un Sa paſſe par le point A; & l'autre Sm n'eſt point parallèle au plan de la Section, puiſqu'il n'y a (*hyp.*) que le ſeul côté SD qui lui ſoit parallèle. Par conſéquent le côté Sm étant prolongé (s'il eſt néceſſaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point M, par où paſſe la ligne AM qui eſt formée par la rencontre du plan aSm avec celui de la Parabole. Or il eſt viſible que ce point M eſt un des points de la Parabole FAG; puiſqu'il ſe trouve en même tems dans le plan de la Section, & ſur la Surface Conique. Donc, &c. * *Art.* 253.

PROPOSITION V.

Problême.

263. MENER *d'un point donné* A *ſur une Section Conique, une Tangente* A F. FIG. 133, 134, 135.

Ayant mené par le point A & par le Sommet S du cone, une ligne droite SA qui rencontre le plan de la baſe au point a, on tirera à cette baſe par le point a, la Tangente Eaf; & la ligne AF formée par la rencontre du plan $SEaf$ (prolongé, s'il eſt néceſſaire au dela du Sommet S) avec le plan de la Section, ſera la Tangente qu'on cherche.

Car puiſque la Tangente Eaf tombe toute entiere au dehors de la baſe excepté le ſeul point a, il s'enſuit que le plan $SEaf$ prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet S ne rencontre les Surfaces Coniques oppoſées que dans la ligne Sa auſſi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet S, & que tout le reſte de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conſequent la ligne AF formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux Surfaces que le ſeul point A où la ligne Sa rencontre le plan de la

Section, & tombe toute entiere au dehors excepté ce point. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire paſſer par le point a de la baſe du cone, qu'une ſeule Tangente Eaf; il s'enſuit auſſi que d'un point donné A ſur une Section Conique, on ne peut mener qu'une ſeule Tangente AF.

COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniere de mener une Tangente AF parallèle à une ligne droite MN donnée de poſition ſur le plan d'une Section Conique ou de deux Sections oppoſées. Car ayant mené par le Sommet S du cone, une parallèle SE à MN, elle rencontrera la Directrice DE en un point E, ou bien elle lui ſera parallèle; puiſque cette ligne SE ſera parallèle au plan de la Section, & tombera par conſequent dans le plan SDE. Si elle la rencontre en un point E qui tombe au dehors du cercle qui eſt la baſe du cone: ayant mené du point E à ce cercle, la Tangente Eaf, il eſt clair que le plan $SEaf$ formera par ſa rencontre avecle plan de la Section, une Tangente AF qui ſera parallèle à la ligne MN; puiſque les deux Sections AF, SE, des plans * parallèles $MANSED$, coupés par le plan touchant $SEaf$, ſont parallèles entr'elles auſſi-bien * SE, MN.

* *Hyp.*

COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précédent.

FIG. 133. 1°. Dans la Parabole le Problême eſt impoſſible, lorſque la ligne MN donnée de poſition, devient parallèle au côté SD qui paſſe par le point D où la Directrice DE touche la baſe; car alors le point E tombant en D, on ne pourra mener par ce point d'autre

Tangente que la Directrice DE : & comme le plan qui paſſe par le Sommet & par la Directrice DE eſt * parallèle au plan de la Parabole, il ne pourra former par ſa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorſque la ligne donnée de poſition, n'eſt point parallèle au côté SD, on pourra toujours mener une Tangente AF parallèle à cette ligne, & jamais davantage; car alors le point E tombant au dehors du cercle qui eſt la baſe du cone, on en pourra toujours mener Eaf, EDL à cette baſe; dont l'une EDL ſe confondant avec la Directrice, ne peut ſervir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Section; & l'autre Eaf étant différente de la Directrice, ſervira toujours à trouver par la rencontre du plan $SEaf$ avec le plan de la Parabole, une Tangente AF qui ſatisfera. Il en eſt de même lorſque la ligne SE eſt parallèle à la Directrice, car la Tangente Eaf deviendra alors parallèle à la Directrice; & comme on n'en peut mener qu'une ſeule qui lui ſoit parallèle, puiſque la Directrice touche elle-même la baſe en un point D, il s'enſuit, &c. * *Déf.* 9.

2°. Dans l'Ellipſe, on pourra toujours mener deux Tangentes AF, BG, parallèles à la ligne MN donnée de poſition; & par conſéquent entr'elles. Car tous les points de la Directrice DE tombant au dehors de la baſe, on pourra toujours mener du point E deux Tangentes Eaf, Ebg, à cette baſe qui ne ſe confondront point avec la Directrice, & qui ſerviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section, deux Tangentes AF, BG, qui ſatisferont. Il en eſt de même lorſque la ligne SE eſt parallèle à la Directrice; car au lieu des Tangentes Eaf, Ebg, qui partent d'un point E de cette Directrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes parallèles; ce qui eſt toujours poſſible. FIG. 134.

3°. Dans les Hyperboles oppoſées le Problême eſt impoſſible, lorſque le point E tombe au dedans du cercle qui eſt la baſe du cone; puiſqu'on ne peut mener FIG. 135.

alors aucune Tangente de ce point à la baſe. Mais lorſqu'il tombe au dehors, on pourra toujours trouver deux Tangentes AF, BG, parallèle à la ligne MN donnée de poſition; car la Directrice DE traverſant la baſe, on pourra toujours mener du point E deux Tangentes Eaf, Ebg, à cette baſe, leſquelles tombent de part & d'autre de la Directrice, & qui ſerviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section deux Tangentes AF, BG, qui ſatisferont. Il en eſt de même lorſque la ligne SE eſt parallèle à la Directrice DE; car au lieu des deux Tangentes Eaf, Ebg, il n'y aura qu'à mener deux Tangentes parallèles à la Directrice; ce qui eſt toujours poſſible.

Il eſt à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes parallèles AF, BG, appartiennent toujours aux Hyperboles oppoſées, & jamais à la même; ce qui eſt évident, puiſque les deux Tangentes Eaf, Ebg, de la baſe, tombent néceſſairement de part & d'autre de la Directrice DE.

COROLLAIRE IV.

267. IL ſuit du Corollaire précédent :

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui ſoient parallèles entr'elles; & qu'au contraire dans l'Ellipſe & dans les Hyperboles oppoſées, une Tangente AF, étant donnée de poſition, on en peut toujours mener une autre BG qui lui ſoit parallèle.

2°. Que ſi la ligne MN donnée de poſition, eſt terminée par une Section Conique, on pourra toujours mener dans la Parabole, une Tangente AF qui lui ſoit parallèle, & dans l'Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées deux Tangentes AF, BG; puiſque la ligne SE menée par le Sommet S parallélement à MN rencontrera * le plan de la baſe en un point E hors la circonférence, ou bien lui ſera parallèle.

* *Art.* 256.

DÉFINITIONS,

DÉFINITIONS.

12.

Dans une Parabole, ſi l'on mene par un de ſes points quelconques A vers le dedans une ligne AB parallèle au côté SD qui paſſe par le point D où la Directrice DE touche la baſe : cette ligne AB ſera nommée *Diametre*, & le point A en ſera *l'origine*. FIG. 133.

13.

Dans l'Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées, toute ligne droite AB, qui joint les points d'attouchement de deux tangentes parallèles AF, BG, eſt appellée *Diametre*; & les points A, B, en ſont les extrêmités. FIG. 134, 135.

14.

Si par un point quelconque P de tel Diametre AB qu'on voudra d'une Section Conique, l'on tire une ligne droite MN qui rencontre la Section aux points M, N, & qui ſoit parallèle à la tangente AF qui paſſe par l'origine A de ce Diametre dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ſes extrêmités dans les autres Sections : on dira que cette ligne MN eſt *Ordonnée* de part & d'autre au Diametre AB, & que chacune de ſes parties PM, ou PN, eſt *Ordonnée* à ce Diametre. FIG. 133, 134, 135.

15.

Lorſqu'un Diametre fait avec ſes Ordonnées des angles droits, on l'appelle *Axe*.

COROLLAIRE.

268. IL ſuit de la Définition douzieme :

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole ſont parallèles entr'eux, puiſqu'ils ſont tous parallèles au même côté du cone SD qui paſſe par le point D où la Directrice DE touche la baſe.

2°. Que par un point donné ſur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un ſeul Diametre, puiſqu'on ne peut mener par ce point qu'une ſeule parallèle au côté SD.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 136, 137, 138. 269. UN *diametre* AB *d'une Section Conique étant donné, avec une de ſes ordonnées* PM, *décrire la Section.*

Ayant fait paſſer par l'ordonnée PM un plan quelconque autre que le plan APM, on menera dans ce plan par le point P une perpendiculaire indéfinie Pa à PM; & on décrira d'un point quelconque C de cette ligne, & du rayon CM un cercle. Cela fait,

1°. Lorſque la Section doit être une Parabole. On
FIG. 136. menera de l'un des points a, D, où le cercle coupe la perpendiculaire Pa (par exemple du point a) par l'origine A du diametre AB, la ligne aA qui rencontre en S, une ligne DS tirée de l'autre point D parallélement à AB. On décrira enſuite une ſurface Conique qui ait pour ſommet le point S, & pour baſe le cercle $DMaN$. Je dis qu'elle formera par ſa rencontre avec le plan APM, la Parabole cherchée MAN. Car ayant mené par les extrêmités du diametre Da les paralléles DE, af, à PM; il eſt clair qu'elles ſeront tan-
* *Hyp.* gentes, puiſque * PM eſt perpendiculaire ſur Da. Or le plan SDE qui paſſe par le ſommet S du cone & par
* *Hyp.* la tangente DE, eſt parallèle au plan APM, puiſque *
* *Déf.* 10 & 12. SD eſt parallèle à AP, & DE à PM: d'où il ſuit * que la Section MAN faite par le plan APM dans la ſurface Conique, ſera une Parabole qui aura pour diametre la ligne AB. De plus le plan touchant Saf forme
* *Art.* 263. dans le plan APM * une tangente AF, qui ſera parallèle à PM; puiſqu'elle eſt la commune Section des deux plans Saf, APM, qui paſſent par les paral-
* *Déf.* 14. lèles af, PM: & par conſéquent * la ligne PM ſera ordonnée au diametre AB.

FIG. 137, 138. 2°. Lorſque la Section Conique doit être une Ellipſe ou une Hyperbole. On menera des points a, b, où la perpendiculaire indéfinie Pa coupe le cercle, par les

extrêmités A, B, du diametre AB, les droites aA, bB, qui ſe rencontrent au point S. On décrira enſuite un cone qui ait pour ſommet le point S, & pour baſe le cercle $aMbN$. Je dis que le plan APM formera dans la ſurface de ce cone la Section MAN qu'on demande. Car menant SD parallèle au diametre AB de la Section, & qui rencontre en D le diametre ab de la baſe, par où & par les extrêmités a, b, ſoient tirées les parallèles DE, af, bg, à PM; il eſt clair que le plan SDE ſera parallèle au plan APM, & qu'ainſi DE * ſera la Directrice. Or dans l'Ellipſe le point D tombe ſur le diametre ab prolongé hors le cercle; puiſque le diametre AB de la Section, tombe dans l'angle aSb fait par les côtés du cone Sa, Sb: & au contraire dans l'Hyperbole le point D tombe au dedans du cercle; puiſqu'alors le diametre AB tombe dans l'angle aSB qui eſt à côté de l'angle aSb. D'où il ſuit ſelon la Définition 10, que la Section MAN eſt une Ellipſe dans le premier cas, & une Hyperbole dans le ſecond. De plus la tangente AF qui paſſe par l'extrêmité A du diametre AB, étant la commune Section du plan touchant Saf & du plan coupant APM, qui paſſent par les parallèles af, PM, ſera parallèle à PM: & de même la tangente BG étant la commune Section du plan touchant Sbg & du plan coupant APM, leſquels paſſent par les deux parallèles bg, PM, ſera auſſi parallèle à PM. D'où l'on voit que la ligne AB eſt * un diametre, qui a pour ordonnée PM.

* *Déf.* 9.

* *Déf.* 13 & 14.

Il peut arriver dans l'Ellipſe que les lignes Aa, Bb, ſoient parallèles entr'elles; mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre C du cercle $aMbN$, tel autre point qu'on voudra de la ligne ab.

DÉFINITION.

16.

Si par les deux points D, E, où la Directrice coupe la baſe, lorſque la Section eſt une Hyperbole, on tire

FIG. 139.

deux Tangentes DH, EK; & que par le Sommet S & ces Tangentes, on faſſe paſſer deux plans SDH, SEK: les deux lignes droites indéfinies CH, CK, que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, ſont appellées *Aſymptotes*.

COROLLAIRE I.

270. SI par un point d'attouchement D, l'on mene le côté DS prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet S: il eſt viſible que le plan SDH ne peut avoir de commun avec les deux ſurfaces Coniques oppoſées que ce côté; puiſque tous les points de la Tangente DH tombent hors la circonférence de la baſe, excepté le ſeul point D. Or le plan SDE qui paſſe par le Sommet S & par la Directrice DE, étant * parallèle au plan des Hyperboles oppoſées, les communes Sections SD, CH, de ces deux plans avec le même plan SDH ſeront parallèles entr'elles; c'eſt pourquoi l'Aſymptote CH tombera toute entiere au dehors & entre les deux ſurfaces Coniques oppoſées, & laiſſera par conſéquent les Hyperboles oppoſées toutes entieres de part & d'autre ſans les rencontrer. On prouvera la même choſe de l'autre Aſymptote CK. Or comme les deux Aſymptotes CH, CK, ſont formées par les plans SDH, SEK, qui tombent de part & d'autre de la même ſurface Conique & de ſon oppoſée; il s'enſuit que tous les points de l'Hyperbole FAG ſont compris dans l'angle HCK; & que tous les points de ſon oppoſée tombent dans l'angle qui lui eſt oppoſé au Sommet.

* *Déf.* 9.

PROPOSITION VI.

Théorême.

FIG. 139. 271. *SI par un point quelconque* B *d'une Aſymptote* CK, *l'on mene une parallèle* BA *à l'autre Aſymptote*

CH; *je dis qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles oppoſées en un ſeul point* A, *& qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.*

Puiſque les deux lignes BA, SD, ſont parallèles à la même ligne CH, elles le ſeront entr'elles; & ainſi elles ſe trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux ſurfaces Coniques oppoſées, puiſqu'il paſſe par l'un de leurs côtés SD, & qu'il fait un angle avec le plan SDH qui la touche dans ce côté. Le plan des parallèles BA, SD, formera donc dans les deux ſurfaces Coniques, deux côtés, dont l'un eſt le côté SD, & l'autre le côté Sa, qui coupera néceſſairement la ligne BA en quelque point A, puiſqu'il eſt ſitué dans le plan qui paſſe par les parallèles SD, AB, & qu'il coupe SD en S. Donc puiſque le point A ſe trouve en même tems dans l'une des ſurfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles. De plus puiſque la ligne BA étant prolongée indéfiniment du côté du point A, tombe toute entiere dans le plan DSa renfermé entre les côtés DS, Sa, lorſque le point A appartient à l'Hyperbole FAG, & dans ſon oppoſé au Sommet ASd lorſqu'il appartient à l'Hyperbole oppoſée; il eſt viſible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux ſurfaces Coniques, & par conſéquent auſſi au dedans de l'Hyperbole qui en eſt la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole FAG & ſon Aſymptote CH, on ne ſçauroit faire paſſer aucune ligne parallèle à cette Aſymptote. Or comme la ligne BA ſépare l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indéfinies, dont l'une tombe néceſſairement toute entiere dans l'eſpace compris entre les parallèles BA, CH; il s'enſuit que plus CB deviendra petite, plus le point A avancera dans cette portion, & cela toujours de plus en plus juſqu'à ce que CB devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'eſt-à-dire, qu'une Hyperbole & ſon Aſymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toujours de plus en plus, en ſorte que leur diſtance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, ſans pouvoir néanmoins * jamais ſe rencontrer.

* *Art.* 270.

PROPOSITION VIII.

Problême.

FIG. 140. 273. LES *Aſymptotes* CH, CK, *d'une Hyperbole* FAG *étant données avec un de ſes points quelconques* F, *décrire l'Hyperbole.*

Ayant mené par le point donné F, une ligne droite quelconque HK terminée par les aſymptotes, on fera paſſer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan HCK, dans lequel on tirera par le point de milieu P de HK une perpendiculaire indéfinie MN à cette ligne; & on décrira d'un de ſes points quelconques O comme centre, & du rayon OF, un cercle FMN. On menera des points H, K, deux Tangentes HD, KE, à ce cercle; & par les points d'attouchemens D, E, deux parallèles DS, ES, aux Aſymptotes CH, CK, leſquelles ſe rencontreront en un point S; duquel comme Sommet, on décrira une ſurface Conique qui ait pour baſe le cercle FMN. Je dis que cette ſurface Conique formera par ſa rencontre avec le plan HCK l'Hyperbole requiſe FAG.

Il eſt clair par la propriété du cercle FMN; 1°. Que la corde FG eſt diviſée par le milieu au point P, par le diametre MN qui lui eſt * perpendiculaire; & partant, puiſque par la conſtruction $PH = PK$, il s'enſuit que $FH = GK$, $GH = FK$; & par conſéquent $GH \times HF = FK \times KG$. 2°. Que $GH \times HF = \overline{HD}$, & $FK \times KG = \overline{KE}$, & qu'ainſi $HD = KE$. 3°. Que ſi l'on prolonge les Tangentes HD, KE, juſqu'à ce qu'elles ſe

* *Hyp.*

rencontrent en un point Q, les parties DQ, EQ, ſeront égales entr'elles. Ce qui donne $DQ.EQ :: DH.EK$. D'où l'on voit que la ligne DE qui joint les points d'attouchemens des deux Tangentes HD, KE, ſera parallèle à la ligne HK, & le plan SDE au plan CHK: c'eſt pourquoi la ligne DE ſera * la Directrice; & comme elle coupe la baſe en deux points, la Section Conique FAG * ſera une Hyperbole. De plus il eſt évident que cette Hyperbole paſſera par le point donné F, puiſque ce point eſt commun tant à la ſurface Conique, qu'au plan HCK qui eſt celui de l'Hyperbole; & qu'elle aura pour Aſymptotes les lignes CH, CK, puiſqu'elles ſont * les communes Sections des plans touchans SDH, SEK, & du plan de l'Hyperbole.

* *Déf.* 9.

* *Déf.* 10.

* *Déf.* 15.

S'il arrivoit que les Tangentes DH, EK, fuſſent parallèles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes DE, HK, ſeroient parallèles entr'elles, puiſque ces Tangentes ſont égales; & le reſte ſe démontreroit de la même maniere que ci-deſſus.

PROPOSITION IX.

Théorême.

274. *S'il y a deux lignes droites* MN, AB, *terminées par une Section Conique ou par les Sections oppoſées, leſquelles ſe rencontrent en un point* P; *& qui ſoient parallèles à deux autres lignes*, SE, SD, *données de poſition : je dis que le rectangle* MP×PN *eſt au rectangle* AP×PB, *en raiſon donnée; c'eſt-à-dire que la raiſon de ces deux rectangles demeure toujours la même, en quelque endroit que puiſſe tomber les deux lignes* MN, AB. FIG. 141, 142.

Ayant mené par les parallèles SE, MN, & SD, AB, deux plans, ils formeront dans le plan de la baſe, deux lignes droites Enm, Dba, & dans la ſurface Conique les côtés SMm, SNn, SAa, SBb; & leur commune interſection ſera la ligne SPp, qui rencontre le plan de

la baſe au point p, où les deux droites Em, Da, s'entrecoupent; par lequel je mene dans le plan SMN la droite HK parallèle à MN, & dans le plan SAB la droite FG parallèle à AB. Cela poſé,

Les triangles ſemblables SPM, SpH; SPN, SpK; SPA, SpF; SPB, SpG; donnent $MP \times PN. Hp \times pK :: \overline{SP}. \overline{Sp} :: AP \times PB. Fp \times pG$. Et partant on aura $MP \times PN. AP \times PB :: Hp \times pK. Fp \times pG$. Or la raiſon de $Hp \times pK$ à $Fp \times pG$, eſt compoſée des deux raiſons de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, & de $mp \times pn$ ou par la propriété du cercle $ap \times pb$ à $Fp \times pG$. Mais à cauſe des triangles ſemblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, il vient $Hp. mp :: SE. mE$. Et $pK. pn :: SE. En$. Et en multipliant les Antécédens & les Conſéquens de ces deux raiſons, $Hp \times pK. mp \times pn :: \overline{SE}. mE \times En$: on prouvera de même à cauſe des triangles ſemblables Fpa, SDa, & Gpb, SDb, que $ap \times pb. Ep \times pG :: aD \times Db. \overline{SD}$. Il eſt donc évident que la raiſon de $MP \times PN$ à $AP \times PB$, eſt compoſée des deux raiſons de $\overline{SE}$ à $mE \times En$, & de $aD \times Db$ à $\overline{SD}$; leſquelles par la propriété du cercle qui eſt la baſe du cone, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites MN, AB, parce que les points E, D, ne changent point. Donc le rectangle $MP \times PN$ eſt au rectangle $AP \times PB$ en raiſon donnée. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

FIG. 143. 144. 275. DE-LA on voit que ſi dans une Section Conique, où entre les Sections oppoſées, il y a deux lignes droites MN, OR, parallèles entr'elles & qui rencontrent aux points P, Q, une troiſieme ligne droite AB auſſi terminée par la Section; on aura $MP \times PN. OQ \times QR :: AP \times PB. AQ \times QB$.

PROPOSITION

PROPOSITION X.

Théorême.

276. SI *par un point quelconque* A *d'une Parabole ou d'une Hyperbole* MAN, *l'on tire une ligne droite* AB *parallèle au côté du cone* SD, *mené dans la Parabole par le point* D *où la Directrice touche la baſe, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre; & que par un point quelconque* P *de cette ligne, l'on tire une ligne* MN *parallèle à une ligne* SE *donnée de poſition, & terminée par la Section ou par les Sections oppoſées, avec une autre ligne* FG *parallèle à la ligne* Da *commune Section du plan* SAB *avec celui de la baſe, & terminée par les côtés* Sa, SD: *je dis que la raiſon du rectangle* MP×PN *au rectangle* FP×PG *eſt donnée, c'eſt-à-dire qu'elle demeure toujours la même, en quelque endroit de la ligne* AB *que tombe le point* P. FIG. 145.

Ayant mené par les parallèles SE, MN, un plan: il formera dans celui de la baſe une ligne droite Enm; dans la ſurface Conique les côtés SMm, SNn; & dans le plan SDa la ligne SPp qui rencontre la baſe au point p, où les lignes Em, Da, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan SMN la ligne HK parallèle à MN. Cela poſé, les triangles ſemblables SPM, SpH; SPN, SPK; SPF, Spa; SPG, SPD donneront $MP\times PN.\ Hp\times pK :: \overline{SP}.\ \overline{Sp} :: FP\times PG.\ ap\times pD$, ou par la propriété du cercle $mp\times pn$. Et partant on aura $MP\times PN.\ FP\times PG :: Hp\times pK.\ mp\times pn$. Mais la raiſon de $Hp\times pK$ à $mp\times pn$, eſt compoſée des deux raiſons de Hp à pm, & de pK à pn, c'eſt-à-dire, à cauſe des triangles ſemblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, des deux raiſons de SE à Em, & de SE à En; & par conſéquent $Hp\times pK.\ mp\times pn$, ou $MP\times PN.\ FP\times PG :: \overline{SE}.\ mE\times En$. Donc puiſque le point E ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point P, & que tous les rectangles $Em\times En$ ſont égaux

par la propriété du cercle ; il s'enſuit que $MP \times PN$ eſt à $FP \times PG$ en raiſon donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 146. 277. DE-LA il eſt évident que ſi par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN, l'on mene dans la Parabole un diametre AB, & dans l'Hyperbole une parallèle AB à l'une de ſes Aſymptotes ; & que par deux points quelconques P, Q, de la ligne AB, l'on tire deux parallèles MN, OR, terminées par la Section ou par les Sections oppoſées ; on aura $MP \times PN. OQ \times QR :: AP. AQ$.

Car menant le plan SAB qui forme par ſa rencontre avec la ſurface Conique les côtés SD, Sa, entre leſquels le côté SD paſſera par le point où la Directrice touche la baſe lorſque la Section eſt une Parabole, & par l'un des deux points où la Directrice la rencontre lorſque c'eſt une Hyperbole ; & tirant dans le plan SDa par les points P, Q, les droites FG, TV, parallèles à Da : il eſt clair par la Propoſition précédente que $MP \times PN. FP \times PG :: OQ \times QR. TQ \times QV$. Et qu'ainſi $MP \times PN. OQ \times QR :: FP \times PG. TQ \times QV$. Or les parties PG, QV, des lignes FG, TV, ſont égales entr'elles ; puiſque les lignes AB, SD, ſont parallèles. Et partant $MP \times PN. OQ \times QR :: FP. TQ :: AP. AQ$. à cauſe des triangles ſemblables APF, AQT. Donc, &c.

CHAPITRE II.

De l'Ellipſe en particulier.

DÉFINITIONS.

17.

FIG. 147. Si une ligne droite indéfinie SZ qui eſt hors le plan d'un cercle VXY, ſe meut par un de ſes points X autour de la circonférence de ce cercle toujours parallé-

lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne SZ dans ce mouvement, est appellée *Surface cylindrique.*

18.

Cette ligne SZ en chaque différente position, en est toujours appellée le *Côté.*

19.

Le cercle VXY, la *Base.*

20.

La droite indéfinie CO menée du centre C de la base parallélement aux côtés, en est *l'Axe.*

21.

Le solide indéfini compris par la base VXY & par la Surface cylindrique, est appellé *Cylindre.*

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallèle à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe $AMBN$ formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appellée *Section cylindrique.*

PROPOSITION XI.

Théorême.

278. SI *l'on coupe un cylindre par un plan* uxy *parallèle au plan de la base* VXY. ; *la Section* vxy *sera un cercle qui aura pour centre le point* c *où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne* cx *égale au rayon* CX *de la base.* FIG. 147.

Car menant par un point quelconque x de la Section vxy un côté xX de la Surface cylindrique, il sera parallèle * à l'axe Cc : c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans parallèles $CVXY$, $cvxy$, deux droites CX, cx, parallèles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre * *Déf.* 20.

les parallèles Cc, Xx. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la Section vxy qu'on prenne le point x, il s'enſuit que toutes les lignes cx menées du point c, aux points x de la Section vxy, ſont égales aux rayons CX de la baſe : c'eſt-à-dire que la Section vxy ſera la circonférence d'un cercle, qui aura pour centre le point c, où le plan vxy rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne cx égale au rayon CX de la baſe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XII.

Théorême.

FIG. 148. 279. TOUTE *Ellipſe peut être regardée comme une Section cylindrique.*

Ayant mené dans la baſe du cone où eſt produite une Ellipſe quelconque, le diametre ab qui rencontre à angles droits au point D la Directrice DE, ſoient tirés ſur la ſurface Conique les côtés Sa, Sb, qui rencontrent le plan de l'Ellipſe aux points A, B ; & dans les plans parallèles AMB, SDE, les droites AB, SD. Ayant pris DF moyenne proportionnelle entre aD, Db, & mené à SF les parallèles AG, BH, ſoit décrit ſur le plan de la baſe du cône, un cercle qui ait pour diametre la ligne GH, & une ſurface cylindrique qui ait pour baſe ce cercle, & pour côtés les droites AG, BH. Cela poſé,

Je dis que ſi par un point quelconque P de la ligne AB, l'on tire à la Directrice DE, une parallèle qui rencontre la ſurface Conique en M, & la Cylindrique en O ; les points M, O, ſe confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un ſeul.

Car ayant fait paſſer par cette parallèle un plan parallèle au plan des deux baſes tant du cone que du cylindre, il formera ſur la ſurface Conique * un cercle KML dont le centre ſera la commune Section de ce

* Art. 259.

plan avec l'axe du cone, & ſur la ſurface Cylindrique * un autre cercle QMR dont le centre ſera la commune Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le plan Sab paſſe * par l'axe du cone, & le plan $AGHB$ (qui ne fait qu'un ſeul plan avec celui du triangle Sab) par l'axe * du cylindre ; & par conſéquent les lignes KL, QR, communes Sections de ces deux plans, avec le plan parallèle (à la baſe) qui paſſe par la ligne POM, ſeront les diametres de ces deux cercles ; & cette ligne POM ſera perpendiculaire à ces diametres, puiſqu'elle eſt * parallèle à DE qui eſt * perpendiculaire à ab & à GH qui ne font * qu'une même ligne, à laquelle les diametres KL & QR qui ne font auſſi qu'une même ligne, ſont parallèles. De plus les lignes AB, SD, étant formées par les rencontres du même plan Sba avec deux plans parallèles entr'eux ; ſçavoir, le plan SDE & celui de l'Ellipſe, ſeront auſſi parallèles entr'elles. Ceci bien entendu,

* *Art.* 278.
* *Déf.* 6.
* *Déf.* 20.
* *Hyp.*
* *Hyp.*
* *Hyp.*

1°. Dans le cone, à cauſe du cercle KML, on aura $\overline{PM} = KP \times PL$; & à cauſe des triangles ſemblables APK, SDa, & PBL, SDb, il vient $AP. KP :: SD. aD$. Et $PB. PL :: SD. Db$. D'où il ſuit que $AP \times PB. KP \times PL$ ou $\overline{PM} :: \overline{SD}. aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cauſe du cercle QOR, on aura $\overline{PO} = QP \times PR$; & à cauſe des triangles ſemblables APQ, SDF, & PBR, SDF, on formera ces deux proportions $AP. QP :: SD. DF$. Et $PB. PR :: SD. DF$. D'où il ſuit que $AP \times PB. QP \times QR$ ou $\overline{PO} :: \overline{SD}. \overline{DF}$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM} = \overline{PO}$, & $PM = PO$. Donc les points M, O, ſe confondent l'un avec l'autre, & n'en font qu'un ſeul. Donc, puiſque cela arrive toujours en quelque endroit de la ligne AB que l'on prenne le point P, il s'enſuit que le plan de l'Ellipſe rencontre les ſurfaces Coniques & Cylindriques dans les mêmes points, & qu'ainſi toute Ellipſe peut toujours être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre eſt moins compoſé qu'un cone, en ce que tous ſes côtés ſont parallèles entr'eux; au lieu que dans le cone ils aboutiſſent tous au même point qui en eſt le ſommet; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipſe comme la Section d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les propriétés de tous ſes diametres; & que ſe ſervant enſuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre ſuivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes choſes dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

PROPOSITION XIII.

Théorême.

FIG. 149. 280. TOUS *les diametres d'une Ellipſe paſſent par un ſeul & unique point, qui eſt celui où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe du cylindre; & y ſont coupés en deux parties égales.*

Et réciproquement toutes les lignes qui paſſent par ce point, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'Ellipſe; y ſont coupées en deux également, & en ſont des diametres.

On nomme ce point le *Centre* de l'Ellipſe.

1°. Soit AB un diametre quelconque, & C le point où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes Aa, Bb, parallèles à l'axe Cc, il eſt clair * qu'elles ſeront des côtés de la ſurface cylindrique, & que les deux plans FAa, GBb, qui paſſent par ces deux lignes, & par les deux tangentes AF, BG, qui ſelon la définition des diametres, doivent être parallèles entr'elles, ſeront parallèles entr'eux, & toucheront la ſurface cylindrique dans les côtés Aa, Bb; d'où il ſuit que ces deux plans formeront dans le plan de la baſe deux lignes af, bg, parallèles entr'elles, &

* Déf. 29.

qui toucheront la baſe aux points a, b, où les côtés Aa, Bb, la rencontrent. Or il eſt démontré dans les Elémens de Géométrie, que la ligne ab qui joint les points d'attouchement de deux tangentes parallèles af, bg, d'un cercle, paſſe par ſon centre c. Partant le plan $AabB$ paſſera par l'axe Cc du cylindre; & la ligne AB, qui eſt la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipſe, paſſera par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipſe. De plus à cauſe des parallèles Aa, Bb, Cc; il eſt évident que le diametre AB de l'Ellipſe, eſt diviſé en deux également au point C; puiſque le diametre ab du cercle l'eſt au point c qui en eſt le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extrêmités A, B, d'une ligne quelconque AB, qui paſſe par le point C où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe Cc du cylindre, les lignes Aa, Bb, parallèles à cet axe; il eſt clair ſelon la définition 17 de la ſurface cylindrique, qu'elles en ſeront des côtés, & que le plan $AabB$ paſſera par l'axe Cc du cylindre. D'où l'on voit que la ligne ab commune Section de ce plan & de celui de la baſe, paſſe par le centre c de la baſe; & qu'ainſi, puiſqu'elle y eſt coupée en deux également, la ligne AB la ſera auſſi au point C. De plus les tangentes af, bg, qui paſſent par les extrêmités du diametre ab étant parallèles entr'elles; les plans touchans faA, gbB, ſeront parallèles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipſe deux lignes parallèles AF, BG, qui la toucheront aux extrêmités A, B, de la ligne AB, qui en ſera par conſéquent un diametre. *C'eſt ce qu'il falloit démontrer en ſecond lieu.*

COROLLAIRE.

281. DE-LA il eſt évident que par un point donné ſur le plan d'une Ellipſe autre que le centre, on ne peut faire paſſer qu'un ſeul diametre.

PROPOSITION XIV.

Théorême.

FIG. 149. 282. TOUTE *ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre en un point* P.

Et réciproquement ſi une ligne quelconque MPN *terminée par une Ellipſe & qui ne paſſe point par le centre* C, *eſt coupée en deux également en* P, *par un diametre* AB ; *elle ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.*

Ayant mené par les points *A*, *B*, *M*, *N*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Mm*, *Nn*, parallèles à l'axe *Cc* du cylindre, & qui rencontrent le plan de la baſe aux points *a*, *b*, *m*, *n* ; la ligne *Pp* commune Section des deux plans *AabB*, *MmnN*, ſera parallèle aux côtés du cylindre, puiſque tous les côtés ſont parallèles entr'eux. De plus le plan *AabB* paſſera par l'axe *Cc* du cylindre, puiſque le diametre *AB* paſſe par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipſe ; & il formera par conſéquent dans le plan de la baſe une ligne *ab* qui paſſera par le centre *c*, c'eſt-à-dire, un diamètre. Cela poſé,

Puiſque par la ſuppoſition la ligne *MPN* eſt ordonnée de part & d'autre au diametre *AB*, elle ſera parallèle aux tangentes *AF*, *BG*, qui paſſent par les extrêmités de ce diametre ; & par conſéquent les plans touchans *FAa*, *GBb*, ſeront parallèles au plan *MmnN*. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la baſe ; ſçavoir les deux tangentes *af*, *bg*, & la ligne *mn*, ſeront donc parallèles entr'elles ; & ainſi la ligne *mn* ſera perpendiculaire au diametre *ab*, qui la diviſera par conſéquent en deux parties égales au point *p*. D'où il ſuit à cauſe des parallèles *Mm*, *Pp*, *Nn*, que la ligne *MN* ſera auſſi diviſée en deux parties égales au point *P*.

Maintenant pour prouver la converſe, on menera dans

dans le plan de l'Ellipſe deux tangentes AF, BG *, paral- * *Art.* 267.
lèles à MN; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre AB, il eſt clair ſelon les définitions 13 & 14, que cette ligne MN ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre, & par conſéquent (ſelon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en P par ce même diametre. Or comme l'on ne peut mener par le point P * qu'un ſeul diametre, il s'enſuit * *Art.* 281.
que ſi une ligne MN terminée par une Ellipſe, & qui ne paſſe point par le centre C, eſt coupée en deux également en P par un diametre AB, elle lui ſera ordonnée de part & d'autre.

PROPOSITION XV.

Théorême.

283. *S'il y a dans une Ellipſe deux diametres* AB, DE; *dont l'un d'eux* DE *ſoit parallèle aux Tangentes* AF, BG, *qui paſſent par les extrémités de l'autre* AB: *je dis réciproquement que le diametre* AB *ſera parallèle aux Tangentes qui paſſent par les extrémités du diametre* DE. FIG. 149.

Les deux diametres AB, DE, ſont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points A, B, D, E, les côtés Aa, Bb, Dd, Ee, du cylindre, leſquels rencontrent le plan de la baſe aux points a, b, d, e; les plans $AabB$, $DdeE$, paſſeront par l'axe Cc du cylindre, puiſque les lignes AB, DE, ſont des diametres de l'Ellipſe; & formeront par conſéquent dans le plan de la baſe, deux diametres ab, de. Or le plan touchant FAa étant parallèle au plan $DdeE$, formera dans le plan de la baſe une Tangente af parallèle au diametre de, lequel diametre ſera par conſéquent perpendiculaire ſur le diametre ab. Si donc l'on mene par l'une des extrêmités d du diametre de une Tangente dh au cercle, elle ſera parallèle au diametre ab, & le plan hdD parallèle au

plan $AabB$: c'eſt pourquoi les communes Sections de ces deux plans avec le plan de l'Ellipſe, ſçavoir la Tangente DH & le diametre AB, ſont parallèles entr'elles. On prouvera la même choſe à l'égard de la Tangente qui paſſe par l'autre extrêmité E du diametre DE. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

284. DE-LA il eſt évident que s'il y a deux diametres conjugués AB, DE, dans une Ellipſe; les deux plans qui paſſent par ces diametres & par l'axe Cc du cylindre, formeront dans le plan de la baſe deux diametres ab, de, qui ſeront perpendiculaires entr'eux : ce qui eſt réciproque.

COROLLAIRE II.

285. IL ſuit encore de cette Propoſition que ſi par un point quelconque P d'un diametre AB, on mene une ordonnée MPN de part & d'autre, elle ſera parallèle au diametre DE qui lui eſt conjugué; & qu'ainſi on aura * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}$. $DC \times CE$ ou $\overline{DC}$ :: $AP \times PB$. $AC \times CB$ ou $\overline{AC}$. Ce qui donne $\overline{PM}$. $AP \times PB$ :: $\overline{DC}$. $\overline{AC}$ :: $4\overline{DC}$ ou $\overline{DE}$. $4\overline{AC}$ ou $\overline{AB}$. C'eſt-à-dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MP à un diametre AB, eſt au rectangle $AP \times PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre DE qui lui eſt conjugué, eſt au quarré du diametre AB.

* *Art.* 275.

PROPOSITION XVI.

Théorême.

FIG. 150. 286. SI *par un point quelconque* M *d'une Ellipſe* AMB, *l'on mene une Tangente* FMG *qui rencontre aux points* F, G, *deux autres Tangentes* AF, BG, *parallèles entr'elles : je dis que* FM. MG :: AF. BG.

Ayant mené par les points d'attouchemens A, B, M, les côtés Aa, Bb, Mm, du cylindre, & fait paſſer par ces côtés & par les Tangentes AF, BG, FG, les trois plans FAa, GBb, FMm, ou GMm; il eſt clair que les communes Sections Ff, Gg, des deux premiers plans avec le troiſieme, ſeront parallèles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans FMm, FAa, paſſant par les côtés Mm, Aa, qui ſont parallèles entr'eux, leur commune Section Ff ſera parallèle à ces côtés; & par la même raiſon Gg commune Section des deux plans GBb, GMm, ſera parallèle aux côtés Bb, Mm. De plus les lignes af, bg, que forment les plans touchans parallèles FAa, GBb, dans le plan de la baſe, en ſeront des Tangentes parallèles; les parties fm, mg, de la troiſieme Tangente formée dans le plan de la baſe par le troiſieme plan touchant FMm, ou GMm, ſeront égales (par la propriété du cercle) aux Tangentes af, bg; ſçavoir, fm à fa, & mg à gb. Cela poſé,

A cauſe des lignes Aa, Ff, Mm, Gg, Bb; & AF, BG; & af, bg, qui ſont parallèles entr'elles, on aura $FM.\ MG :: fm$ ou $fa.\ mg$ ou $gb :: FA.\ GB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

287. SI l'on mene par les points d'attouchement A, B, des deux Tangentes parallèles entr'elles AF, BG, un diametre AB qui rencontre en T la Tangente FMG, & qu'on tire l'ordonnée MP à ce diametre : il eſt évident que $AP.\ PB :: FM.\ MG :: AF.\ BG :: AT.\ BT$. Et qu'ainſi $PB - AP.\ PB :: BT - AT$ ou $AB.\ BT$.

COROLLAIRE II.

288. DE-LA on tire la maniere ſuivante de mener d'un point donné M ſur une Ellipſe la Tangente MT, un diametre AB étant donné avec la poſition de ſes ordonnées.

De l'une des extrêmités B du diametre AB, ſoit tirée au point donné M la droite BM. Puis ayant mené l'ordonnée MP au diametre AB, & pris ſur ce diametre du côté de B la partie PH égale à PA, ſoit tirée HK parallèle à PM, rencontrant la ligne BM en K, par où & par l'autre extrêmité A ſoit menée AK. Soit enfin tirée MT parallèle à AK, elle ſera la Tangente qu'on cherche.

Car à cauſe des parallèles MP, HK, & AK, MT, l'on aura $BP. PH.$ ou $PA :: PM. MK :: BT. TA.$

COROLLAIRE III.

289. S'IL y a dans une Ellipſe deux Tangentes MT, NT, qui ſe rencontrent en un point T; je dis que le diametre AB qui paſſe par le point P milieu de la ligne MN qui joint les deux points d'attouchement, paſſera auſſi par le point T. Car PN eſt ordonnée au diametre AB de même que PM; & par conſéquent * les Tangentes MT, NT, iront chacune rencontrer ce diametre en un point T, tel que $PB — AP. PB :: AB. BT$; c'eſt-à-dire dans le même point.

* *Art.* 287.

COROLLAIRE IV.

290. SI l'on joint dans une Ellipſe les points d'attouchemens M, N, de deux Tangentes MF, NL, par une ligne droite MN; & qu'il y ait une troiſieme Tangente FAL parallèle à MN: je dis que les parties FA, AL de cette derniere Tangente, priſes entre ſon point d'attouchement A & les deux premieres, ſeront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement A le diametre AB, il eſt clair que la ligne MN eſt ordonnée de part & d'autre à ce diametre, puiſqu'elle eſt parallèle à la Tangente FL qui paſſe par ſon extrêmité A; & qu'ainſi il la coupe par le milieu en P, & paſſe * par conſéquent par le point de rencontre

* *Art.* 289.

T des deux Tangentes MF, NL; ou bien il leur ſera parallèle, ſi la ligne MN eſt * un diametre. Or il eſt viſible en l'un & l'autre cas, que FL ſera diviſé en deux parties égales au point A par le diametre AB; puiſque MN l'eſt en P par ce même diametre. * *Art.* 283.

CHAPITRE III.

De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.

PROPOSITION XVII.

Théorême.

291. DANS *une Parabole toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P : *ce qui eſt réciproque.* Fig. 151.

Ayant fait paſſer par la ligne MN un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant SDE parallèle au plan Parabolique, une Tangente DE parallèle à MN. De plus le plan SAF mené par le Sommet S du cône, & par la Tangente AF qui paſſe par l'origine A du diametre AB, formera dans le plan Elliptique une Tangente af; & la ligne Da qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes DE, af, paſſera par le point P; puiſque le diametre AB eſt parallèle au côté touchant SD. Cela poſé,

Puiſque par la ſuppoſition * les deux lignes AF, MN, ſont parallèles entr'elles; il s'enſuit que la Tangente af, qui eſt la commune Section de deux plans qui paſſent par ces deux lignes, ſera parallèle à MN; & par conſéquent à DE. D'où l'on voit * que la ligne Da, qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes parallèles DE, af, eſt un diametre de l'Ellipſe; & qu'ainſi la ligne MN qui eſt parallèle à ces Tangentes & terminée par l'Ellipſe, ſera * diviſée en deux également au point P. * *Déf.* 14. * *Déf.* 13. * *Art.* 282.

Maintenant pour prouver la converſe, on menera

dans le plan de la Parabole * une Tangente AF parallèle à la ligne MN; & ayant tiré par le point d'attouchement A un diametre AB, il aura pour ordonnée de part & d'autre * la ligne MN, qu'il diviſera par conſéquent en deux parties égales au point P ſelon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un ſeul diametre * qui puiſſe paſſer par le point de milieu P de la ligne MN, il s'enſuit, &c.

* *Art.* 167.

* *Déf.* 14.

* *Art.* 261.

COROLLAIRE.

292. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene par deux points quelconques P, Q, d'un diametre AB deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR; on aura toujours * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}$ :: AP. AQ. C'eſt-à-dire que les quarrés de deux ordonnées quelconques PM, QO, à un diametre AB, ſeront toujours entr'eux, comme les parties AP, AQ, de ce diametre priſes depuis ſon origine A juſqu'à ces mêmes ordonnées.

* *Art.* 277.

PROPOSITION XVIII.

Théorême.

FIG. 151. 293. SI *par un point quelconque* M *d'une Parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ſes diametres* AB *qu'on voudra, & une Tangente* MT *qui rencontre en* T *ce diametre prolongé au-delà de ſon origine* A : *je dis que ſes parties* AP, AT, *ſeront égales.*

La même préparation étant faite que dans la Propoſition précédente, ſoit de plus mené par le Sommet S du cone & par la Tangente MT, le plan touchant STM qui formera dans le plan Elliptique la Tangente MH, laquelle rencontrera le diametre Da de l'Ellipſe en un point H par où paſſera la ligne ST; & ſoit enfin tirée la droite TG parallèle à SA. Ceci bien entendu, on aura * DH. Ha :: DP. Pa, & (*alternando*)

* *Art.* 287.

$DH. DP :: Ha. Pa.$ Mais à cauſe des parallèles AB, SD, & SA, TG; il eſt clair que $DH. DP :: SH. ST :: Ha. Ga.$ Donc $Ha. Pa :: Ha. Ga.$ Donc auſſi $Pa = Ga$; & par conſéquent $AP = AT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIX.

Théorême.

294. DANS *les Hyperboles oppoſées tout diametre* AB *paſſe par le point d'interſection* C *des deux aſymptotes, & y eſt coupé en deux également: ce qui eſt réciproque.* FIG. 152.

On nommera ce point, *Centre.*

Soit HSh une des deux communes Sections du plan parallèle au plan Hyperbolique, & des deux ſurfaces Coniques oppoſées; & ſoit l'Aſymptote FG formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux ſurfaces en cette ligne HSh. Soient menées par les Tangentes parallèles AF, BG, qui paſſent par les extrêmités du diametre AB, & qui rencontrent l'Aſymptote FG aux points F, G, deux plans Elliptiques parallèles; ils formeront dans le plan touchant qui paſſe par le côté HSh, les Tangentes parallèles FH, Ghf, & dans le plan touchant SAF les Tangentes parallèles AF, af.

Cela poſé, les lignes parallèles FH, Gh, étant renfermées entre les deux autres parallèles FG, Hh, ſeront égales entr'elles; & les triangles ſemblables SHF, Shf, & SFA, Sfa, donneront cette proportion, $HF. hf :: SF. sf :: FA. fa$. Et partant $HF. FA :: hf. fa ::$ * $hG. GB$. Donc puiſque $HF = hG$, il s'enſuit que $AF = BG$; & à cauſe des triangles ſemblables ACF, BCG, que $AC = CB$: c'eſt-à-dire que l'Aſymptote FG paſſe par le point de milieu C du diametre AB. On prouvera de même que l'autre Aſymptote paſſera encore par le point de milieu C du diametre AB; d'où l'on voit que le diametre AB paſſe par le

* *Art.* 286.

point d'interſection C des deux Aſymptotes, & y eſt coupé en deux parties égales.

Soit à préſent une ligne AB qui paſſant par le point d'interſection C des deux Aſymptotes, rencontre les Hyperboles oppoſées aux points A, B. Si l'on mene par le point A la Tangente AF, & à l'Hyperbole oppoſée une Tangente DG * parallèle à AF; il eſt clair par ce qu'on vient de prouver que la ligne AD qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diametre, paſſera par le point d'interſection C des Aſymptotes. Elle ſe confondra donc avec la ligne AB qui paſſe auſſi * par les deux mêmes points A, C: c'eſt-à-dire que le point D tombera ſur le point B. C'eſt pourquoi cette ligne AB ſera un diametre, & partant coupée en deux parties égales au point C.

* *Art.* 267.

* *Hyp.*

COROLLAIRE.

295. DE-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un ſeul diametre; puiſqu'il n'y a qu'une ſeule ligne qui puiſſe paſſer par ce point, & par le centre.

PROPOSITION XX.

Théorême.

FIG. 153. 296. DANS *les Hyperboles oppoſées toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui eſt réciproque.*

Ayant fait paſſer par la ligne MN un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans SAF, SBG, deux Tangentes af, bg; & la ligne ab qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Section du plan Elliptique & du plan SAB, paſſera par le point P. Or puiſque par la ſuppoſition les

les deux lignes AF. MN, ſont parallèles, il s'enſuit que la ligne af qui eſt la commune Section de deux plans, qui paſſent par ces deux lignes, ſera parallèle à MN. Par la même raiſon la Tangente bg commune Section du plan Elliptique & du plan touchant SBG, leſquels paſſent par les deux parallèles MN, BG, ſera parallèle à MN. Les deux Tangentes af, bg, ſeront donc parallèles entr'elles : d'où il ſuit que la ligne ab * eſt un diametre de l'Ellipſe ; & qu'ainſi la ligne MN * eſt diviſée en deux parties égales au point P.

* *Déf.* 13.
* *Art.* 282.

Maintenant pour prouver la converſe, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes AF, BG, parallèles à la ligne MN terminée par l'Hyperbole ; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre AB, il eſt clair ſelon la Définition quatorzieme, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne MN ; & qu'ainſi il la coupera ſelon ce qu'on vient de démontrer, en deux parties égales au point P. Or comme il n'y a qu'un ſeul diametre * qui puiſſe paſſer par ce point, il s'enſuit que ſi une ligne MN terminée par une Hyperbole, eſt coupée en deux également en P par un diametre AB, elle ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.

* *Art.* 267.
* *Art.* 295.

COROLLAIRE.

297. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR, à un diametre AB, on aura toujours * $MP \times PN$. ou $\overline{PM}$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}$ :: $AP \times PB$. $AQ \times QB$. C'eſt-à-dire, &c.

* *Art.* 275.

PROPOSITION XXI.

Théorême.

298. *Si par un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on mene une Tangente* MFG *qui rencontre deux autres Tangentes parallèles* AF, BG, *aux points* F, G : *je dis que* MF. MG :: AF. BG. FIG. 154.

Ayant mené deux plans Elliptiques parallèles qui paſſent par les Tangentes AF, BG ; ils formeront dans le plan touchant SMG deux Tangentes HF, hG, parallèles entr'elles ; & le plan Elliptique qui paſſe par BG, formera dans le plan touchant SAF, une Tangente af qui rencontrera la Tangente hG au point f, où la ligne FS rencontre ce plan Elliptique. Cela poſé, les Tangentes af, BG, ſeront parallèles entr'elles ; puiſqu'elles le ſont chacune à la Tangente AF : & partant * on aura $BG. Gh :: af. fh$ (à cauſe des triangles ſemblables Shf, SHF, & Saf, SAF,) $:: AF. FH$. Donc $BG. AF :: Gh. FH$ (à cauſe des triangles ſemblables MGh, MFH,) $:: MG. MF$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 268.

Il eſt viſible qu'on peut tirer de cette Propoſition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipſe art. 287, 288, 289 & 290, c'eſt pourquoi je ne m'amuſerai point à les répéter.

PROPOSITION XXII.

Théorême.

FIG. 155. 299. SI *une ligne droite* FG *terminée par les Aſymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point* A ; *je dis que cette ligne droite y ſera coupée en deux parties egales.*

Soient menés par le Sommet S du cone, & par les deux Aſymptotes CF, CG, deux plans, leſquels toucheront * la ſurface Conique dans les côtés SM, SN, où le plan MSN parallèle au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui paſſe par la droite FG ; il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes MF, NG, & dans le plan MSN une ligne droite MN parallèle à FG, & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela poſé, il eſt viſible que la ligne FG * eſt coupée en deux parties égales au point A ; puiſqu'elle touche dans ce point l'Ellipſe, auſſi bien que l'Hyperbole.

* *Def.* 16.

* *Art.* 290.

COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne FG qui paſſant par un point donné A au dedans d'un angle FCG, & étant terminée par ſes côtés, ſoit coupée en deux également par ce point A; il s'enſuit que ſi une ligne droite FG terminée par les Aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point A qui la diviſe, cette droite FG deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné A ſur une Hyperbole dont les Aſymptotes CF, CG, ſont données, une Tangente FAG; il n'y a qu'à tirer la ligne AD parallèle à l'une des Aſymptotes CG, & terminée par l'autre; & ayant pris la partie DF égale à CD, tirer la ligne FAG: elle ſera la Tangente cherchée. Car à cauſe des triangles ſemblables FCG, FDA, la ligne FG ſera coupée par le milieu en A; puiſque * CF l'eſt en D. * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. SI l'on joint deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole MAN par une ligne droite qui rencontre les Aſymptotes aux points H, K; les deux parties MH, NK, de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Aſymptotes, ſeront égales entr'elles. Car ayant mené par le point P milieu de MN, le diametre CP; & par le point A où ce diametre rencontre l'Hyperbole, la ligne FG parallèle à MN, & terminée par les Aſymptotes: il eſt clair * que cette ligne FG ſera Tangente en A; & par conſéquent * diviſée en deux parties égales en ce point. D'où il eſt clair, à cauſe des triangles ſemblables CAF, CPH, & CAG, CPK, que $PH = PK$; & par conſéquent $MH = NK$. FIG. 156. * *Art.* 296. * *Art.* 299.

COROLLAIRE IV.

FIG. 157. 303. SI d'un point donné A ſur une Hyperbole, l'on tire deux droites AF, AG, terminées par ſes Aſymptotes ; & que d'un autre point quelconque M de la même Hyperbole, ou de ſon oppoſée, on tire deux autres droites MH, MK, terminée auſſi par ſes Aſymptotes, & parallèles aux deux premieres AF, AG: je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

Car 1°. Lorſque les deux points A, M, tombent ſur la même Hyperbole ; ayant joint ces deux points A, M, par une ligne droite qui rencontre les Aſymptotes en P & Q, les triangles ſemblables PAF, PMH, & QMK, QAG, donneront ces deux proportions, $AF. MH ::$ $AP. MP$ * $:: MQ. AQ :: MK. AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

* *Art.* 302.

2°. Lorſque les points A, M, tombent ſur les deux Hyperboles oppoſées ; ayant mené par le point donné A & par le centre C, le diametre AB, & tiré les droites BD, BE, parallèles à AF, AG, & terminées par les mêmes Aſymptotes ; il eſt clair que les triangles CAF, CBD, & CAG, CBE, ſeront ſemblables & de plus égaux entr'eux, puiſque * $CA = CB$. C'eſt pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or ſelon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc auſſi $FA \times AG = KM \times MH$.

* *Art.* 294.

AVERTISSEMENT.

Je laiſſe les autres propriétés des Aſymptotes, & des Diametres conjugués, parce qu'elles ſe tirent de celles-ci ſur le plan, comme l'on a fait dans le troiſieme Livre ; mon deſſein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la conſidération du Solide, pour démontrer tout à la fois & ſans aucun calcul, les pro-

priétés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Aſymptotes ; d'où dépendent toutes les autres. C'eſt ce que je crois avoir exécuté d'une maniere fort aiſée, & entiérement nouvelle ; puiſque je ne me ſuis point ſervi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Géometres Modernes après Mrs. *Paſchal* & *Deſargues* ; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonſtrations ſeules me paroiſſent auſſi longues que celles de tout ce Livre.

LIVRE SEPTIEME.

Des lieux Géométriques.

DÉFINITION I.

FIG. 158, 159. SOIENT deux droites inconnues & indéterminées AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle APM donné ou pris à volonté ; & dont l'une AP que j'appellerai toujours x, ait un commencement fixe au point A, & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de poſition ; & l'autre PM que je nommerai y, en change continuellement, & ſoit toujours parallèle à elle-même : c'eſt-à-dire que toutes les droites PM doivent être parallèles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnues x & y mêlées avec des connues, & qui exprime la relation de chaque indéterminée AP (x) à ſa correſpondante PM (y). La ligne droite ou courbe qui paſſe par les extrêmités de toutes les valeurs de y, c'eſt-à-dire, par tous les points M, eſt appellé en général un *Lieu Géométrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158. Suppoſons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toujours la relation de AP (x) à PM (y) qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM. Ayant pris ſur la ligne AP la partie $AB = a$, & de B mené $BE = b$ parallèle à PM & du même côté ; la droite indéfinie AE ſera nommée en général un *Lieu Géométrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP parallèle à BE, les triangles ſemblables ABE, APM, donneront toujours cette proportion, $AB\ (a).\ BE\ (b) ::\ AP\ (x).\ PM\ (y) = \frac{bx}{a}$. Et partant la droite AE eſt le lieu de tous les points M.

Digitized by Google

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de AP à PM, & que l'angle APM soit droit ; la circonférence d'un cercle qui a pour rayon la droite $AB = a$ prise sur la ligne AP, sera appellé en général un *Lieu Géometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la perpendiculaire MP (y), on aura toujours par la propriété du cercle, $\overline{PM}\,(yy) = DP \times PB\,(aa - xx)$ en prenant BD pour le diametre de ce cercle. D'où l'on voit que sa circonférence est le lieu de tous les points M. Fig. 159.

REMARQUE.

304. SI après avoir supposé que les PM tendent vers un certain côté de la ligne AB, comme vers Q, on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté opposé, comme vers G ; il faut remarquer que leurs valeurs deviennent négatives de positives qu'elles étoient, & qu'ainsi on a pour lors $PM = -y$. De même si après avoir supposé que les points P tombent d'un certain côté par rapport au point A, comme du côté de B, on suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme vers D ; les AP deviendront négatives de positives qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$. Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs *vraies*; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Géométrique doit passer par les extrêmités de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue x. Si donc l'on mene la droite QAG parallèle à PM, un lieu Géométrique pourra se trouver dans les quatre angles BAQ, BAG, GAD, DAQ, comme dans le second exemple (*fig.* 159.), ou seulement dans quelques-uns de ces angles comme dans le premier (*fig.* 158.). Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'abord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point M sur le quart QB de la circonférence ; si ensuite le point M Fig. 158, 159.

eſt pris ſur le quart GB, on aura $AP=x$, & $PM=-y$; s'il eſt pris ſur DG, on aura $AP=-x$, & $PM=-y$; & enfin s'il eſt pris ſur DQ, on aura $AP=-x$, & $PM=y$; & il viendra toujours dans tous ces cas par la propriété du cercle, la même équation $yy=aa-xx$; parce que les quarrés de $\pm y$ & de $\pm x$ ſont les mêmes dans tous ces cas, ſçavoir yy & xx. De même dans le premier exemple, ſi en prenant d'abord le point M du côté de E ſur AE, dans l'angle QAP, on fait $AP=x$, & $PM=y$; ce point M pris enſuite ſur EA prolongée du côté de A dans l'angle GAD, donnera $AP=-x$, & $PM=-y$; & à cauſe des triangles ſemblables ABE, APM, on formera cette proportion $AB\,(a).\ BE\,(b)::AP\,(-x).$ $PM\,(-y)=-\frac{bx}{a}$; & partant $y=\frac{bx}{a}$, qui eſt la même équation que l'on trouve en ſuppoſant que le point M tombe dans l'angle BAQ.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'il s'agira dans la ſuite de conſtruire le lieu d'une équation donnée, on ſuppoſera toujours que $AP\,(x)$ & $PM\,(y)$ ſoient poſitives, c'eſt-à-dire que tous les points M tombent dans le même angle BAQ. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui ſera renfermée dans cet angle.

DÉFINITION II.

Les anciens Géometres ont appellé *Lieux plans*, ceux qui ſont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui ſont des Paraboles, des Ellipſes, ou des Hyperboles. Mais les Modernes diſtribuent les lieux Géométriques en différens degrés: ils comprennent ſous le premier tous ceux où les inconnues x & y n'ont qu'une dimenſion dans leurs équations; ſous le ſecond, tous ceux où elles n'en ont que deux; ſous le troiſieme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainſi de ſuite. Où l'on doit

doit obſerver que les inconnues x & y ne ſe doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré; qu'elles ne doivent faire au plus enſemble qu'un produit de deux dimenſions xy dans le ſecond, un de trois xxy ou xyy dans le troiſieme, &c.

DÉFINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, ſont regardés comme différens entr'eux lorſque l'une ou l'autre des inconnuës x & y, ou toutes les deux jointes enſemble s'y trouvent avec différentes dimenſions. Ainſi dans le premier degré ſi l'on propoſe l'équation $y - \frac{bx}{a} + c = o$, les termes y, $-\frac{bx}{a}$, c, ſeront différens; & de même dans le ſecond, ſi l'on propoſoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + hx - hh + ll = o$, les termes yy, $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + hx$, $-hh + ll$, ſeroient chacun différens.

AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du ſecond degré; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour conſtruire des lieux plus compoſés dans les cas particuliers qui ſe peuvent rencontrer: on en trouvera même quelques exemples dans la ſuite. Mon deſſein eſt donc de donner dans ce Livre une méthode générale pour conſtruire les lieux du premier & du ſecond degré, leurs équations étant données; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite; & que le ſecond ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipſe & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles oppoſées.

DEMANDE.

305. ON demande qu'on puiſſe réduire ſous une fraction ſimple & abregée, toute quantité littérale donnée, ſi compoſée qu'elle puiſſe être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puiſſe prendre une fraction ſimple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fc} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres a, c, f, g, marquent des lignes données. 2°. Qu'on puiſſe trouver une ſeule ligne droite $s = \frac{age-bce}{bb+af}$, où les lignes droites a, b, c, e, f, g, ſont données. 3°. Qu'on puiſſe trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccee-eehh}{bb+af}$, où les lignes a, b, c, e, f, b, s, ſont données; de ſorte qu'on ait ſon côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccee-eehh}{bb+af}}$. On enſeignera au commencement du huitieme Livre comment cela ſe fait.

PROPOSITION I.

Problême.

306. CONSTRUIRE *tout lieu du premier degré, ſon équation étant donnée.*

Lorſque les inconnues x & y n'ont qu'une dimenſion dans l'équation propoſée, & que leur produit xy ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation ſera toujours une ligne droite, & on la réduira à l'une des quatre formules ſuivantes.

1°. $y = \frac{bx}{a}$, 2°. $y = \frac{bx}{a} + c$, 3°. $y = \frac{bx}{a} - c$, 4°. $y = c - \frac{bx}{a}$, dans leſquelles on ſuppoſe que l'inconnue y ſoit délivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre inconnue x ſoit réduite * ſous cette expreſſion $\frac{b}{a}$, & tous les termes connus ſous cette autre c.

* *Art.* 305.

Les mêmes choſes étant poſées que dans la définition premiere, on conſtruira les lieux des trois dernieres

formules de la maniere qui ſuit; car pour le lieu de la premiere, on l'a déjà conſtruit dans cette définition.

Pour conſtruire le lieu de la ſeconde formule $y=\frac{bx}{a}+c$, on prendra ſur la ligne AP la partie $AB=a$; & ayant mené les droites $BE=b$, $AD=c$, parallèles à PM & du même côté, on tirera la ligne AE indéfinie du côté de E, & la droite indéfinie DM parallèle à AE. Je dis que cette ligne DM renfermée dans l'angle PAQ fait par la ligne AP & par la droite AQ menée parallèlement à PM & du même côté, ſera le lieu de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la ligne MP parallèle à AQ & qui rencontre AE en F; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront $AB\,(a).\ BE\,(b)::AP\,(x).\ PF=\frac{bx}{a}$. Et partant $PM\,(y)=PF\left(\frac{bx}{a}\right)+FM\,(c)$. FIG. 160.

Le lieu de la troiſieme formule $y=\frac{bx}{a}-c$ ſe conſtruit en cette ſorte. Ayant pris $AB=a$, & mené les droites $BE=b$, $AD=c$, parallèles à PM; ſçavoir BE du même côté que AQ, & AD du côté oppoſé; on tirera par les points A, E, la droite AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallèle à AE, & qui rencontre AP en G. Je dis que la droite indéfinie GM renfermée dans l'angle PAQ, ſera le lieu qu'on cherche. Car on aura toujours $PM\,(y)=PF\left(\frac{bx}{a}\right)-FM\,(c)$. FIG. 161.

Enfin pour avoir le lieu de la quatrieme formule $y=c-\frac{bx}{a}$. Ayant pris ſur AP la partie $AB=a$, & mené les droites $BE=b$, $AD=c$, parallèles à PM; ſçavoir, BE du côté oppoſé, & AD du même côté que AQ; on tirera par les points A, E, la ligne AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallèle à AE, & qui rencontre en G la ligne AP. Je dis que la droite DG renfermée dans l'angle PAQ, ſera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la ligne FIG. 162.

MP parallèle à AQ, & qui rencontre AE en F, on aura toujours $PM(y) = FM(c) - PF\left(\frac{bx}{a}\right)$.

Si l'inconnue x n'eſt multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes ſe changeront en celles-ci.

1°. $y = x$, 2°. $y = x + c$, 3°. $y = x - c$, 4°. $y = c - x$, leſquelles ſe conſtruiſent de la même maniere, en obſervant de prendre la droite BE égale à AB que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

REMARQUE.

307. IL peut arriver que l'équation ſoit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnues x ou y; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y = c$, & $x = c$.

FIG. 163. Pour conſtruire la premiere formule $y = c$. Les mêmes choſes étant toujours poſées que dans la définition premiere, on menera par le point fixe A, la droite $AD = c$ parallèle à PM & du même côté, on tirera enſuite la droite indéfinie DM parallèle à AP: je dis que cette ligne DM ſera le lieu de l'équation propoſée. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP parallèle à AD, il eſt clair qu'on aura toujours $PM(y). = AD(c)$.

FIG. 164. Pour conſtruire la ſeconde formule $x = c$. Ayant pris $AP = c$, on tirera la droite indéfinie PM qui faſſe avec AP l'angle APM donné ou pris à volonté: je dis qu'elle ſera le lieu de tous les points M. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la droite MQ parallèle à AP, & qui rencontre au point Q l'indéfinie AQ parallèle à PM; il eſt clair qu'on aura toujours MQ ou $AP\ (x) = c$, de quelque grandeur que l'on puiſſe prendre $PM(y)$.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il eſt à propos, pour éclairer l'eſprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la méthode dont

je vais me ſervir pour la conſtruction des lieux du ſecond degré. Elle conſiſte à conſtruire d'abord une Parabole enſorte que l'équation qui en exprime la nature ſoit la plus compoſée qu'il ſe puiſſe, de faire enſuite la même choſe dans l'Ellipſe, & dans l'Hyperbole rapportée à ſes diametres & conſidérée entre les aſymptotes; ce qui fournit des équations ou formules générales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant propoſée, je puiſſe connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée; & comparant enſuite tous ſes termes avec ceux de la formule, j'en tire la conſtruction du lieu de cette équation, en obſervant certaines remarques qui ſervent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propoſitions qui ſuivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à la Parabole.

308. SOIENT comme dans la premiere définition deux lignes droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$; & ſoient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela poſé, FIG. 165, 166.

1°. On prendra ſur la ligne AP, la partie $AB = m$; ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, parallèles à PM & du même côté, on tirera par le point A la droite AE que j'appelle c, & par le point D la droite indéfinie DG parallèle à AE; ſur laquelle DG ayant pris la partie $DC = s$ du côté de PM, on décrira * du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AP. Je dis que ſa portion renfermée dans l'angle PAD, fait par la ligne AP, & par une ligne AD menée par le point fixe A parallélement à PM & du même côté, eſt le lieu de l'équation ou formule ſuivante. FIG. 165. * *Art.* 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o.$$
$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M de cette portion de Parabole, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, AB (m). AE (e) :: AP (x). AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et AB (m). BE (n) :: AP (x). $PF = \frac{nx}{m}$. Et par conſéquent GM ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, & CG ou $DG - DC$ $= \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne * $\overline{GM} = CG \times CH$, laquelle équation ſe change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc, &c.

* *Art.* 19.

FIG. 166. 2°. On menera par le point fixe A, une ligne droite indéfinie AQ parallèle à PM & du même côté; & ayant pris ſur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallèle à AP & du même côté que PM, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris ſur AP la partie $AD = r$ du même côté que PM, on tirera la droite indéfinie DG parallèle à AE, ſur laquelle on prendra la partie $DC = s$ auſſi du même côté de PM. On décrira enſuite * du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites parallèles à AP, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AQ. Je dis que ſa portion renfermée dans l'angle BAP, ſera le lieu de cette ſeconde équation ou formule.

* *Art.* 161.

$$xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{nn}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr = o.$$
$$- \frac{ep}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MQ parallèle à AP, & qui rencontre les paral-

lèles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB\,(m).\ AE\,(e) :: AQ$ ou $PM\,(y).\ AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$. Et $AB\,(m).\ BE\,(n) :: AQ\,(y).\ QF = \frac{ny}{m}$. Et par conſéquent GM ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Or la Parabole donne $\overline{GM}^{2} = CG \times CH$, laquelle équation ſe change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc, &c.

COROLLAIRE.

309. IL eſt clair 1°. Que dans la premiere de ces équations ou formules, le quarré yy ſe trouve ſans fraction, & que dans la ſeconde c'eſt le quarré xx. 2°. Que dans ces deux formules les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes lignes, enſorte que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie le plan xy, multiplie l'un des quarrés xx ou yy; d'où il ſuit que ſi le plan xy ne ſe rencontroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le quarré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puiſqu'alors la fraction donnée $\frac{2n}{m}$ ſeroit nulle.

PROPOSITION II.

Problême.

310. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ne ſe rencontrant point, il n'y a qu'un des deux quarrés* xx & yy; *ou bien le plan* xy *s'y rencontrant, les deux quarrés* xx & yy *s'y rencontrent auſſi avec les mêmes ſignes, enſorte que le quarré*

de la moitié de la fraction qui multiplie xy, *ſoit égal à celle qui multiplie le quarré de l'une des inconnues. On ſuppoſe toujours qu'il y ait un des quarrés* xx *ou* yy *qui ſoit délivré de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la premiere formule du Lemme précédent, ſi le quarré yy s'y rencontre ſans fraction ; ou avec celui qui lui répond dans la ſeconde formule, lorſque c'eſt le quarré xx. On tirera enſuite de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen deſquelles on décrira comme l'on a enſeigné dans le Lemme (en ſe ſervant des deux Remarques ſuivantes) une Parabole qui ſera le lieu cherché.

REMARQUE I.

311. 1°. ON prendra pour AB (m) telle grandeur poſitive que l'on voudra. 2°. Les lignes AB (m), BE (n) étant données, la ligne AE (e) l'eſt auſſi puiſque l'angle ABE eſt donné. 3°. Lorſque $n=o$, la ligne AE tombe ſur AB, c'eſt-à-dire, ſur AP dans la conſtruction de la premiere formule, & ſur AQ dans celle de la ſeconde ; alors on aura $AB\ (m)=AE\ (e)$, puiſque les points B, E, ſe confondront alors enſemble. 4°. Lorſque la valeur de l'une des quantités n, r, s, eſt négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté oppoſé à celui de PM ; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorſqu'elle eſt poſitive.

REMARQUE II.

312. S'IL arrive que la valeur du parametre CH (p) ſoit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté oppoſé à celui du Lemme : c'eſt-à-dire, du côté oppoſé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée AP dans la conſtruction de la premiere formule, & l'indéterminée

terminée AQ dans celle de la ſeconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

313. SOIT $yy - 2ay - bx + cc = o$ l'équation donnée, dont il faut conſtruire le lieu.

Comme le quarré yy ſe trouve ici ſans fraction, je choiſis la premiere formule * du Lemme, de laquelle comparant chaque terme avec celui qui lui répond dans la propoſée, j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le plan xy ne ſe rencontrant point dans la propoſée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zéro; d'où je tire $n = o$, & par conſéquent * $m = c$: c'eſt pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ ſe rencontre, & mettant au lieu de e ſa valeur m, je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = o$. 2°. La comparaiſon des termes correſpondans $-2ry$ & $-2ay$ donne $r = a$. 3°. Celle de $-px$ & $-bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnues x & y ne ſe trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour r & p leurs valeurs a & b, je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$, qui eſt une valeur négative lorſque a ſurpaſſe c, comme on le ſuppoſe ici. Je n'ai point comparé les premiers termes yy & yy entr'eux; parce qu'étant préciſément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de n, r, p, s, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu en me ſervant de la conſtruction * de la formule, & obſervant ce qu'il y a dans la premiere * Remarque en cette ſorte.

* *Art.* 308. *n.* 1.

* *Art.* 311.

* *Art.* 308. *n.* 11.

* *Art.* 311.

Puiſque $BE\,(n) = o$, les points B, E, ſe confondent, & la ligne AE tombe * ſur AP; c'eſt pourquoi je mene d'abord par le point fixe A la ligne $AD\,(r) = a$ parallèle à PM, & du même côté, parce que ſa valeur eſt poſitive. Je tire enſuite DG parallèle à AP, ſur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$ du côté oppoſé à

* *Art.* 311.

FIG. 167.

PM; parce que $s = \frac{cc-aa}{b}$, qui eſt une valeur négative.

* *Art.* 161. Je décris enfin * du diametre CG (qui ait pour parametre la ligne $CH\,(p) = b$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM) une Parabole ; & je dis que ſes deux portions OMM, RMS, renfermées dans l'angle PAO fait par AP & par la ligne AO menée parallélement à PM & du même côté, ſera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques M, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre DG au point G ; on aura $GM = y - a$, ou $GM = a - y$, ſelon que le point M tombera au-deſſus ou au-deſſous du diametre CG ; & CG ou

* *Art.* 19. $DG + CD = x + \frac{aa-cc}{b}$; & partant * par la propriété de la Parabole, $\overline{GM}^2\,(yy - 2ay + aa) = CG \times CH\,(bx + aa - cc)$, c'eſt-à-dire $yy - 2ay - bx + cc = o$, qui eſt l'équation donnée. Donc, &c.

REMARQUE.

314. SI l'on prolonge AO de l'autre côté de A vers X, il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie SM de la Parabole, renfermée dans l'angle SAX, ſera le lieu de toutes les valeurs fauſſes & de l'inconnue y, qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnue x dans l'équation donnée. En effet, ſi l'on prend AP plus grande que AS, & qu'on mene PM parallèle à AX, & du même côté, laquelle rencon-

* *Art.* 304. tre la portion SM en M ; l'on aura * $PM = -y$, & partant la droite GM ou $GP + PM = a - y$, & on retrouvera par la propriété de la Parabole comme ci-deſſus l'équation donnée.

2°. Que la portion RCO de cette Parabole, qui tombe dans l'angle TAO oppoſé au ſommet à l'angle SAX, ſera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue y

dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fauſſes de l'autre inconnue x; car faiſant * $AP = -x$, on retrouvera encore l'équation donnée. * *Art.* 304.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle TAX oppoſé au ſommet à l'angle PAO, elle ſeroit le lieu des valeurs fauſſes de l'inconnue y, qui répondroient aux valeurs fauſſes de l'autre inconnue x. De ſorte que cette Parabole eſt le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnue y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnue x, dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = o$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnue y, qui répondent à la même valeur vraie AP de l'autre inconnue x, lorſque cette ligne AP eſt moindre que AS; qu'il y a une valeur vraie PM, & une fauſſe $-PM$, lorſque AP ſurpaſſe AS; qu'il n'y a qu'une valeur vraie SV de y, l'autre étant nulle ou zéro, lorſque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnue y, qui répondent à la même valeur fauſſe $-AP$ de l'inconnue x, lorſque AP eſt moindre que AT; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente TC, lorſque $AP = AT$; & qu'enfin ſi l'on prenoit AP $(-x)$ plus grande que AT, comme l'appliquée PM ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'enſuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fauſſe de l'inconnue y, qui pût répondre à cette valeur fauſſe $-AP$ de l'autre inconnue x : c'eſt-à-dire que les valeurs de l'inconnue y deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci ſe doit entendre de la même maniere dans tous les autres Exemples qui ſuivent, tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques : de ſorte que la Section Conique qu'on trouvera, ſera non-ſeulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue y par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnue x;

mais auſſi celui de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnue y par rapport aux valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnue x.

EXEMPLE II.

315. SOIT l'équation donnée $yy+\frac{2b}{a}xy+\frac{bb}{aa}xx+2cy-bx+cc=o$, dont il faille conſtruire le lieu.

Comme le quarré yy eſt ici ſans fraction, je choiſis de même que dans l'Exemple précédent, la premiere formule * du Lemme; & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux qui leur répondent dans la propoſée,

* *Art.* 308. *n.* 1.

* *Art.* 311. 1°. $\frac{2n}{m}=-\frac{2b}{a}$; d'où en faiſant * $m=a$, je tire $n=-b$.

2°. $\frac{nn}{mm}=\frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-deſſus, $n=-b$.

3°. $r=-c$. 4°. $\frac{2nr-ep}{m}=-b$; & partant $p=\frac{ab+2bc}{e}$, en mettant pour m, n, r, leurs valeurs a, $-b$, $-c$.

5°. $rr+ps=cc$, ce qui donne $s=o$, en mettant pour rr ſa valeur cc. Or ces valeurs de m, n, r, p, s, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu de cette équation

* *Art.* 308. *n.* 1. en me ſervant de la conſtruction * de la premiere formule en cette ſorte.

FIG. 168. Ayant pris ſur la ligne AP la partie $AB\,(m)=a$, je mene les droites $BE=b=-n$, $AD=c=-r$ parallèles à PM, & du côté oppoſé, parce que $n=-b$ & $r=-c$ qui ſont des valeurs négatives. Je tire enſuite par les points déterminés A, E, la ligne $AE\,(e)$ qui eſt donnée, & par le point D la ligne DG parallèle à AE. Cela fait, comme $DC\,(s)$ eſt nulle ou zéro, le point C

* *Art.* 161. tombe ſur D; c'eſt pourquoi je décris * du diametre DG (qui ait pour parametre $DH\,(p)=\frac{ab+2bc}{e}$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM) une Parabole; & je dis que ſa portion OM renfermée dans l'angle PAH, où l'on ſuppoſe que doivent tomber tous les points M, ſera le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, $AB\ (a).\ AE\ (e) ::\ AP\ (x).\ AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\ (a).\ BE\ (b) ::\ AP\ (x).\ PF = \frac{bx}{a}$. Et par conſéquent GM ou $PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Or par la propriété* de la Parabole, $\overline{GM} = GD \times DH$, c'eſt-à-dire, en mettant les valeurs analytiques, $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$. Donc, &c.

* *Art.* 19.

REMARQUE I.

316. SI la ligne AP ne coupoit point la Parabole, mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entiere au dehors, il s'enſuivroit qu'aucun des points cherchés M ne pourroit tomber dans l'angle PAH, comme l'on avoit ſuppoſé en faiſant la conſtruction; & qu'ainſi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnue y qui répondît à une valeur vraie de l'autre inconnue x, de quelque grandeur qu'elle pût être. FIG. 168.

Cette Remarque eſt générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non-ſeulement dans la Parabole, mais auſſi dans les autres Sections.

REMARQUE II.

317. IL eſt à propos de remarquer que ſi l'on avoit pris pour $AB\ (m)$ une autre grandeur que a, telle qu'elle pût être, les valeurs de $BE\ (n)$ & de $AE\ (e)$ changeroient à la vérité: mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toujours les mêmes; parce que dans le triangle ABE l'angle ABE eſt donné, comme auſſi la raiſon

du côté AB au côté BE, ſçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raiſons de $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, qui ſe puiſſent trouver dans les valeurs de p, r, s; il s'enſuit que ces valeurs demeurent toujours les mêmes, telle grandeur poſitive que l'on puiſſe prendre pour la ligne AB (m): de ſorte qu'on n'a pris $m = a$ que pour rendre la conſtruction plus ſimple. Ce que l'on doit toujours obſerver dans la ſuite.

EXEMPLE III.

318. ON demande le lieu de l'équation donnée $xx + \frac{2b}{a} yx + \frac{bb}{aa} yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a} y = o$.

Comme c'eſt ici le quarré xx qui eſt délivré de fractions, je choiſis la ſeconde formule * du Lemme; & j'ai par la comparaiſon des termes correſpondans, 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = -b$. 2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; & partant, puiſque $m = a$, on trouve comme ci-deſſus $n = -b$. 3°. $r = c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = b - \frac{2bc}{a}$; ce qui donne $p = -\frac{ab}{e}$, en mettant à la place de m, n, r, leurs valeurs $a, -b, c$. 5°. $rr + ps = o$; parce que dans l'équation donnée il ne ſe trouve point de termes entiérement connus, que l'on puiſſe comparer au terme $rr + ps$ de la formule; ce qui donne $s = -\frac{rr}{p} = \frac{ecc}{ab}$, en mettant pour r & p leurs valeurs c & $-\frac{ab}{e}$. Or ces valeurs étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu requis en me ſervant de la conſtruction de la ſeconde formule * du Lemme, & obſervant exactement les articles 311 & 312 de la maniere qui ſuit.

* *Art.* 308. n. 2.

* *Art.* 308. n. 2.

FIG. 169. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallèle à PM, je prends ſur cette ligne la partie AB $(m) = a$; & du point B je tire $BE = b = -n$ parallèle à AP, & du côté oppoſé à PM, parce que la

valeur de n eſt négative ; & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e) qui eſt donnée. Ayant pris ſur AP la partie AD $(r)=c$ du côté de PM, je tire la droite indéfinie DG parallèle à AE, ſur laquelle je prends la partie $DC(s)=\frac{ccc}{ab}$ du côté de PM. Je décris enſuite * du diametre CG (qui ait pour ordonnées des droites parallèles à AP, & pour parametre la ligne $CH=\frac{ab}{c}=-p$) une Parabole qui s'étende * du côté oppoſé à celui où s'étend AQ, parce que $p=-\frac{ab}{c}$ qui eſt une valeur négative. Je dis que la portion OMR de cette Parabole, renfermée dans l'angle PAB, ſera le lieu qu'on cherche.

* *Art.* 161.

* *Art.* 312.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MQ parallèle à AP, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB(a).AE(e)::AQ$ ou $PM(y).AF$ ou $DG=\frac{ey}{a}$. Et $AB(a).BE(b)::AQ(y).QF=\frac{by}{a}$. Et par conſéquent $GM(QM+FQ-FG)=x+\frac{by}{a}-c$, ou $GM(FG-FQ-QM)=c-\frac{by}{a}-x$, ſelon que le point M tombe de part ou d'autre du diametre CD; & la coupée CG ou $CD-DG=\frac{ccc}{ab}-\frac{ey}{a}$. Or * par la propriété de la Parabole, $\overline{GM}=CG\times CH$: c'eſt-à-dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, $xx+\frac{2b}{a}yx+\frac{bb}{aa}yy-2cx+by-\frac{2bc}{a}y=o$, qui eſt l'équation donnée. Donc, &c.

* *Art.* 191.

REMARQUE.

319. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p=o$; il eſt viſible que la conſtruction de la Parabole qui en devroit être le lieu, ſeroit impoſſible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée ſe

peut toujours alors abaiſſer enſorte que ſon lieu devient
* *Art.* 308. une ligne droite ; ce qui ſe voit par les formules * du Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la premiere les termes où p ſe rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m} xy \frac{nn}{mm} xx - 2ry + \frac{2nr}{m} x + rr = o$, de laquelle extrayant la racine quarrée, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = o$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$, dont le lieu eſt une ligne droite que l'on conſtruira ſelon l'article 306. La même choſe arrivera de la ſeconde formule de l'art. 308.

EXEMPLE IV.

320. SOIT propoſée l'équation $xx - ay = o$, de laquelle il faut trouver le lieu.

Comme c'eſt ici le quarré xx qui ſe trouve délivré de
* *Art.* 308. fractions, je choiſis la ſeconde formule * du Lemme ; &
n. 2. j'ai par la comparaiſon des termes qui ſe répondent, 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que xy ne ſe trouve point dans la
* *Art.* 311. propoſée ; d'où je tire $n = o$, & par conſéquent * $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} = o$, parce que le quarré yy ne s'y trouve pas non plus ; d'où je tire encore $n = o$. 3°. $r = o$, parce que l'inconnue x ne ſe trouve point au premier degré dans la propoſée : c'eſt pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r ſe rencontrent, & mettant pour e ſa valeur m ; il vient $xx - py + ps = o$, dont il reſte à comparer les termes avec ceux qui leur répondent dans la propoſée. 4°. La comparaiſon des termes $-py$ & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puiſque dans la propoſée il ne ſe trouve aucun terme entiérement connu que l'on puiſſe comparer au terme ps ; il s'enſuit que $ps = o$, & qu'ainſi $s = o$. Or ces valeurs de n, r, p, s, ainſi déterminées me ſervent à conſtruire le lieu qu'on demande, ayant égard à la conſtruction de la ſeconde formule de l'art. 308 & à l'art. 311 en cette ſorte.

* *Art.* 311. Puiſque $BE\,(n) = o$, la ligne AE tombe * ſur AQ
FIG. 170. menée parallélement à PM & du même côté ; comme

auſſi

auſſi DG, parce que $AD\,(r)=o$. Or puiſque $CD\,(s)=o$, le point C tombe ſur le point D, lequel tombe en A comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Parabole du diametre AQ, qui ait pour parametre $AH\,(p)=a$, & pour ordonnées des droites MQ parallèles à AP: je dis que ſa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAQ, eſt le lieu cherché. * Art. 161.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M les droites MP, MQ, parallèles à AQ & à AP, on aura par la propriété * de la Parabole, $\overline{QM}\,(xx)=AQ\times AH\,(ay)$; & partant $xx-ay=o$, qui étoit l'équation propoſée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 19.

DÉMONSTRATION DU PROBLÊME.

321. SI l'on met dans la formule générale * à la place de m, n, r, s, p, les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de l'équation propoſée, telle qu'elle puiſſe être, pourvu qu'elle ait les conditions marquées dans le Problême, il eſt clair que cette formule générale ſe changera en la propoſée: & partant que ſi l'on prend auſſi ces valeurs dans la conſtruction * du Lemme, le lieu de la formule générale ſe changera en celui de l'équation propoſée. Or, c'eſt ce qu'on a enſeigné dans le Problême accompagné de ſes deux Remarques, comme les Exemples précédens le font aſſez voir. Donc, &c. * Art. 308. * Art. 308.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Ellipſe ou au Cercle.

322. SOIENT encore comme dans la définition premiere deux lignes droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$; & ſoient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s, t. Cela poſé, FIG. 171.

On prendra sur la ligne AP, la partie $AB=m$; & ayant mené les droites $BE=n$, $AD=r$, parallèles à PM, & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e; & par le point D, la droite indéfinie DG parallèle à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC=s$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à t. On décrira ensuite une Ellipse * du diametre LK $(2t)$, qui ait pour parametre $KH=p$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallélement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

* *Art.* 161.

$$yy-\frac{2n}{m}xy+\frac{nn}{mm}xx-2ry+\frac{2nr}{m}x+rr=0.$$
$$+\frac{eep}{2mmt}\qquad-\frac{2eps}{2mt}-\frac{ptt}{2t}$$
$$+\frac{pss}{2t}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M, de cette portion d'Ellipse, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G, les triangles semblables ABE, APF, donneront AF ou $DG=\frac{ex}{m}$, & $PF=\frac{nx}{m}$. On aura donc $GM=y-\frac{nx}{m}-r$, & $CG=\frac{ex}{m}-s$. Or par la propriété de l'Ellipse * $KL\,(2t).\ KH\,(p)::LG\times GK$ ou $\overline{CK}^2-\overline{CG}^2\left(tt-ss+\frac{2esx}{m}-\frac{eexx}{mm}\right).\ \overline{GM}^2\left(yy-\frac{2n}{m}xy-2ry+\frac{nn}{mm}xx+\frac{2nr}{m}x+rr\right)=\frac{ptt-pss}{2t}+\frac{2epsx}{2mt}-\frac{epxx}{2mmt}$. Donc, &c.

* *Art.* 55 & 41.

S'il arrive que le diametre KL $(2t)$ & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux, on aura toujours $\overline{GM}^2=LG\times GK$; d'où il est évident, selon les Elémens de Géométrie, que si l'angle CGM est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diametre la ligne KL.

COROLLAIRE.

323. IL eſt clair que les deux quarrés yy & xx ſe trouvent toujours avec les mêmes ſignes dans cette formule; & que lorſque le plan xy s'y rencontre, le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION III.

Problême.

324. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle les deux quarrés* yy *&* xx *ſe rencontrent avec les mêmes ſignes ſans le plan* xy, *ou avec ce plan, en ſorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit moindre que la fraction qui multiplie le quarré* xx. *On ſuppoſe toujours ici que le quarré* yy *ſoit délivré de fractions.*

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du Lemme précédent; & on tirera de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, t, par le moyen deſquelles valeurs on décrira, comme l'on a enſeigné dans ce Lemme (en obſervant exactement l'art. 311.) une Ellipſe qui ſera le lieu cherché.

* *Art.* 322.

EXEMPLE I.

325. SOIT propoſé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{4}xx - 2ay + bx + cc = o$, dans laquelle le quarré de $\frac{1}{2}$ moitié de la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie xy, eſt moindre que la fraction $\frac{1}{4}$ qui multiplie xx.

La comparaiſon de chaque terme de la formule générale

* *Art.* 322. du Lemme * avec celui qui lui répond dans cette équation, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction littérale qui multiplie le plan xy, on le doit considérer comme étant multiplié par l'unité numérique 1 : & partant si l'on fait $m = a$, l'on aura $n = -\frac{1}{2}a$. 2°. $\frac{mn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{mm - 2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour m, n, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a$: & par conséquent $p = \frac{aat}{2ee}$. 3°. $r = a$. 4°. $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = b$; d'où en mettant pour $m, n, r, \frac{p}{t}$, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a, a, \frac{aa}{2ee}$, il vient $s = \frac{-2ae-2eb}{a}$. 5°. $rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t} = cc$: & partant $tt = ss + \frac{2rr}{p} - \frac{2tcc}{p} = ss + 4ee - \frac{4cccee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{t}$, r, les valeurs $\frac{aa}{2ee}, a$, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse

* *Art.* 322. cherchée en me servant de la construction du Lemme * & de l'article 311 en cette sorte.

Fig. 172. Je prens sur la ligne AP la partie AB (m) a ; & ayant mené parallélement à PM & du même côté la ligne AD $(r) = a$, & du côté opposé la droite $BE = \frac{1}{2}a = -n$, par ce $n = -\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point A la droite AE (e) qui est donnée ; & par le point D, la droite DG parallèle à AE, sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{2ae+2be}{a} = -s$ du côté opposé à PM ; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à

* *Art.* 261. $t = \sqrt{ss + 4ee - \frac{4cccc}{aa}}$. Je décris ensuite * une Ellipse du diametre LK, qui ait pour ordonnées des droites parallèles à PM, & pour parametre la ligne KH $(p) = \frac{aat}{2ee}$. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD, est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M,

la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G, les triangles ſemblables ABE, APF donneront $AB\,(a).\,AE\,(e)::AP\,(x).\,AF$ ou $DG=\frac{ex}{a}$. Et $AB\,(a).\,BE\,(\frac{1}{2}a)::AP\,(x).\,PF=\frac{1}{2}x$. On aura donc $GM=y+\frac{1}{2}x-a$; & CG ou $DG+DC=\frac{ex}{a}-s$, puiſque $DC=-s$. Or par la propriété * de l'Ellipſe $KL\,(2t).\,KH\,\left(\frac{aat}{2ee}\right)::LG\times GK$ ou $\overline{CK}-\overline{CG}$ $\left(tt-ss+\frac{2esx}{a}-\frac{eexx}{aa}\right).\,\overline{GM}\,(yy+xy-2ay+\frac{5}{4}xx-ax+aa)$. D'où en mettant à la place de $tt-ss$ & de s, leurs valeurs $4ee-\frac{4cccc}{aa}$ & $-\frac{2ae-2be}{a}$, multipliant enſuite les extrêmes & les moyens, & diviſant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'équation même propoſée. Donc, &c.

* *Art.* 55 & 41.

REMARQUE.

326. S'IL arrive que $ss+4ee$ ſoit égale ou moindre que $\frac{4cccc}{aa}$, il eſt évident que la valeur de t deviendra nulle ou imaginaire; & qu'ainſi il ſera pour lors impoſſible de conſtruire l'Ellipſe qui devroit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit néceſſairement des contradictions, il s'enſuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'eſt-à-dire, que toutes les valeurs de l'inconnue y qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnue x, ſeroient toutes imaginaires.

Ceci ſe voit clairement dans la formule générale * du Lemme qui, en tranſpoſant quelques termes, devient $yy-\frac{2n}{m}xy-2ry+\frac{nn}{mm}xx+\frac{2nr}{m}x+rr=\frac{ptt-pss}{2t}+\frac{2pesx}{2mt}-\frac{eepxx}{2mmt}$, dans laquelle équation le premier membre eſt le quarré de $y-\frac{n}{m}x-r$; & le ſecond, le quarré de t

* *Art.* 322.

moins le quarré de $s-\frac{cx}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{zt}$. Or il eſt viſible que ſi la valeur du quarré tt eſt nulle ou négative, la valeur de ce ſecond membre ſera négative; & qu'ainſi l'on aura dans ces deux cas un quarré, ſçavoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui eſt une contradiction manifeſte.

EXEMPLE II.

327. ON demande le lieu de l'équation $yy+\frac{b}{a}xy+xx+cy+fx-ag=o$, dans laquelle on ſuppoſe ſuivant l'art. 323, que $\frac{bb}{4aa}$ eſt moindre que la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie le quarré xx; c'eſt-à-dire que b eſt moindre que $2a$.

* *Art.* 322. La comparaiſon des termes de la formule * générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation propoſée, donne 1°. $\frac{2n}{m}=-\frac{b}{a}$; d'où en faiſant $m=a$, on tire $n=-\frac{1}{2}b$. 2°. $\frac{nn}{mm}+\frac{eep}{2mmt}=1$; d'où en mettant pour m, n, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{t}=\frac{4aa-bb}{2ee}$: & partant $p=\frac{4aat-bbt}{2ee}$. 3°. $r=-\frac{1}{2}c$. 4°. $s=\frac{bce-2afe}{4aa-bb}$. 5°. $t=\sqrt{ss+\frac{ccee+4agee}{4aa-bb}}$. Ce qui fournit cette conſtruction.

FIG. 173. Ayant pris ſur la ligne droite indéfinie AP la partie $AB\,(m)=a$, & mené parallèlement à PM & du côté oppoſé les droites $BE=\frac{1}{2}b=-n$, $AD=\frac{1}{2}c=-r$; on tirera par le point A la droite $AE\,(e)$ qui eſt donnée, & par le point D la droite DG parallèle à AE, ſur laquelle on prendra la partie $DC\,(s)=\frac{bce-2afe}{4aa-bb}$ du côté de PM, ſi bc ſurpaſſe $2af$, comme on le ſuppoſe ici; & du côté oppoſé, s'il eſt moindre; enſuite on prendra de part & d'autre du point C, les parties CK & CL égales chacune à $t=\sqrt{ss+\frac{ccee+4agee}{4aa-bb}}$. Cela fait, on décrira * une

* *Art.* 161.

Ellipſe du diametre LK $(2t)$ qui ait pour ordonnées des droites parallèles à PM, & pour parametre une ligne $KH\,(p) = \frac{4aat - bbt}{2ee}$. Je dis que ſa portion OR ſera le lieu de l'équation propoſée.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la droite MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les parallèles AE, LK, aux points F, G, on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$; ce qui donnera MG ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{ex}{a} - s$, ou $s - \frac{ex}{a}$. Or par la propriété * de l'Ellipſe $LK\,(2t).\ KH\left(\frac{4aat - bbt}{2ee}\right) :: LG \times GK\left(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}\right).\ \overline{GM}^2\left(yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{bc}{2a}x + \frac{1}{4}cc\right)$. Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour s leurs valeurs $\frac{ttee + 4agee}{4aa - bb}$ & $\frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$, multipliant enſuite les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2t$) donne l'équation même propoſée.

* *Art.* 55 & 41.

Il eſt à propos de remarquer que ſi l'angle AEB étoit droit, l'angle CGM le ſeroit auſſi; & le diametre LK $(2t)$ ſeroit égal au parametre $KH\left(\frac{4aat - bbt}{2ee}\right)$, puiſque $ee = aa - \frac{1}{4}bb$ à cauſe du triangle rectangle AEB. D'où l'on voit que l'Ellipſe deviendroit alors un cercle qui auroit pour rayon la droite CK ou CL $(t) = \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que $DC\,(s) = \frac{bc - 2af}{4e}$; ce qui rend la conſtruction beaucoup plus ſimple.

EXEMPLE III.

328. SOIT propoſé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = o$.

Je compare les termes de la formule * générale, avec ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai, 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme xy manquant, on le doit

* *Art.* 322.

considérer comme étant multiplié par zéro ; d'où je tire $n=o$: & partant $m=e$. 2°. $\frac{nn}{mm}+\frac{eep}{2mmt}=1$; c'est à-dire, $\frac{p}{2t}=1$ en mettant pour n & m leurs valeurs o & e : & partant $p=2t$. 3°. $r=o$; parce que l'inconnue y ne se trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considérer comme étant multipliée par zéro : c'est pourquoi effaçant dans la formule générale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e & $\frac{p}{2t}$ leurs valeurs m & 1, elle se changera en celle-ci $yy+xx-2sx-tt+ss=o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°. $2s=a$; & partant $s=\frac{1}{2}a$. 5°. $ss-tt=o$; puisqu'il n'y a point de termes entiérement connus dans l'équation donnée : & partant $tt=ss=\frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t=\frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu en cette sorte.

* *Art.* 322.

FIG. 174. Puisque $BE\,(n)=o$, il s'ensuit que AE tombe sur AP, laquelle tombe aussi sur DG, puisqu'on a encore $AD\,(r)=o$; de sorte que le point D tombe en A. C'est pourquoi prenant sur AP, la partie $AC\,(s)$. $=\frac{1}{2}a$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à $t=\frac{1}{2}a$ (le point L tombe ici sur le point A) ; on décrira * du diametre AK qui ait pour ordonnées des droites parallèles à PM, & pour parametre la ligne $KH\,(p)=2t=a$, une Ellipse qui sera le lieu cherché.

* *Art.* 161.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, on aura * $AK\,(a)\,KH\,(a)::AP\times PK\,(ax-xx).\overline{PM}\,(yy)$. Ce qui donne $yy+xx-ax=o$.

* *Art.* 55 & 41.

Il est évident que si l'angle APM est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK=a$.

REMARQUE.

REMARQUE.

329. IL peut arriver deux différens cas où le lieu de l'équation donnée eſt un cercle.

Premier cas. Lorſque les quarrés yy & xx ſe trouvent tous deux avec les mêmes ſignes & ſans fraction dans une équation, où le plan xy ſe trouve auſſi ; & que de plus l'angle AEB eſt droit (ce qui arrive lorſqu'ayant mené AF perpendiculaire ſur PM, la raiſon de PF à AP, qui eſt la même que celle de BE à AB, eſt exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan xy) : le lieu de cette équation ſera toujours un cercle comme l'on a déjà vu dans l'article 324, & la raiſon en eſt évidente par la formule générale. Car l'on aura par la comparaiſon des termes correſpondans où ſe trouve le quarré xx, cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; d'où l'on tire $\frac{p}{2t} = \frac{mm-nn}{ee} = 1$, puiſque à cauſe du triangle rectangle AEB le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle AEB étant droit, l'angle CGM que fait le diametre LK avec ſes ordonnées ſera auſſi droit ; & par conſéquent, puiſque le diametre LK eſt égal à ſon parametre KH, il s'enſuit que l'Ellipſe devient alors un cercle.

Second cas. Lorſque les quarrés yy & xx ſe trouvent tous deux avec les mêmes ſignes & ſans fraction dans une équation, où le plan xy ne ſe rencontre pas, & que de plus l'angle APM eſt droit : ſon lieu ſera toujours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328 ; & cela ſe prouve par le moyen de la formule générale. Car puiſque le plan xy ne ſe trouve point dans l'équation donnée, la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule ſera nulle ou zéro ; & partant $BE\,(n) = o$, & $m = e$. d'où l'on voit : 1°. Que le diametre LK eſt parallèle à la ligne AP, & qu'ainſi l'angle CGM qu'il fait avec ſes ordonnées, étant égal à l'angle APM, ſera

droit. 2°. Que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $\frac{p}{2t}$, & qu'ainſi on aura $\frac{p}{2t} = 1$; c'eſt-à-dire que le diametre LK ſera égal à ſon parametre KH. L'Ellipſe qui eſt le lieu de l'équation donnée ſera donc alors un cercle. Or, comme alors la formule générale ſe change en celle-ci,

$$yy + xx - 2ry - 2sx + rr = 0,$$
$$- tt$$
$$+ ss$$

on pourra, ſi l'on veut abreger le calcul, en ſe ſervant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, les valeurs de r, s, t, qui ſervent à décrire le cercle qui en eſt le lieu.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ſes diametres.

* *Art.* 161. Fig. 175. 176. 330. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Lemme précédent pour l'Ellipſe, on décrira * du diametre LK $(2t)$ qui ait pour parametre KH (p), & pour ordonnées des droites parallèles à PM, une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées. Je dis que ſa portion OM, ou leurs portions renfermées dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallélement à PM & du même côté, ſera le lieu de cette équation ou formule,

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$- \frac{eep}{2mmt} \qquad + \frac{2eps}{2mt}x + \frac{pte}{2t}$$
$$- \frac{pss}{2t}$$

dans laquelle on doit obſerver qu'il y a $+\frac{pte}{2t}$ lorſque

le diametre LK eſt un premier diametre, & $-\frac{ptt}{2t}$ lorſque c'eſt un ſecond.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MP, qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G, on aura par la propriété de l'Hyperbole * $KL(2t).KH(p)::\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2 \left(\frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m}\right.$ * *Art.* 81 & 118.
$\left. +ss \pm tt\right).\overline{GM}^2 = \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy$
$-2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Donc, &c.

S'il arrive que le diametre $KL(2t)$ & ſon parametre $KH(p)$ ſoient égaux entr'eux, l'Hyperbole ſera équilatere.

COROLLAIRE.

331. IL eſt clair, 1°. Que les deux quarrés yy & xx ſe trouvent toujours avec différens ſignes dans cette formule, lorſque le plan xy ne s'y rencontre point; ou bien lorſqu'il s'y trouve, & que $\frac{eep}{2mmt}$ ſurpaſſe $\frac{nn}{mm}$.
2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes ſignes, mais avec ces conditions que le plan xy s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION IV.

Problême.

332. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés* yy *&* xx *ſe rencontrent avec différens ſignes, ou bien avec les mêmes ſignes, mais avec ces deux conditions que le plan* xy *s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit*

plus grand que la fraction qui multiplie le quarré x x. *On ſuppoſe encore ici que le quarré* y y *ſoit délivré de fractions.*

On conſtruit l'Hyperbole qui en eſt le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipſe dans le Problême précédent. Les Exemples qui ſuivent le feront voir.

EXEMPLE I.

333. SOIT $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - hh = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu, & dans laquelle on ſuppoſe que le quarré $\frac{bb}{aa}$ ſurpaſſe $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{epp}{2mmt} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2t} = \frac{bb-af}{ee}$, & $p = \frac{2bbt-2aft}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2rps}{2mt} = -2g$, d'où en mettant pour m, n, r, $\frac{p}{2t}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce-age}{bb-af}$. 5°. $\pm tt = ss - \frac{2rrt-2hht}{p}$. $= ss - \frac{eecc+eehh}{bb-af}$, ſçavoir $+tt$ lorſque le quarré ss ſurpaſſe $\frac{eecc+eehh}{bb-af}$, & $-tt$ lorſqu'il eſt moindre, parce que le quarré tt doit être poſitif; ce qui fait deux différens cas. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu en me réglant ſur la conſtruction du Lemme, de la maniere qui ſuit.

FIG. 177. Ayant pris ſur AP la partie $AB = a$, & mené parallèlement à PM & du côté oppoſé les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points A, E, la droite AE (e) qui eſt donnée, & par le point D la droite indéfinie DG parallèle à AE, ſur laquelle je prends la partie $DC = \frac{eag+ebc}{bb-af} = -s$ du côté oppoſé à PM, & de part & d'autre du point C, les parties

CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{cccc - cehh}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{cccc + cehh}{bb - af} - ss}$, selon que ss eſt plus grand ou moindre que $\frac{cccc + cehh}{bb - af}$. Cela fait, du diametre LK (qui ait pour ordonnées des droites parallèles à PM, & pour parametre la ligne $KH\ (p) = \frac{2bbt - 2afe}{cc}$) je décris une Hyperbole, en obſervant que LK (*fig.* 177) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un ſecond (*fig.* 178) dans le dernier. Je dis que ſa portion OM ſera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, une parallèle MP à AD, laquelle rencontre les lignes AB, AE, DG, aux points P, F, G; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conſéquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puiſque $CD = -s$. Or par la propriété de l'Hyperbole, $LK\,(2t)$. $KH\left(\frac{2bbt - 2afe}{cc}\right) :: \overline{CG} \pm \overline{CK}\left(\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt\right)$. $\overline{GM}\left(yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc\right)$; ce qui, en mettant pour $ss \pm tt$ & s leurs valeurs $\frac{ccee + cehh}{bb - af}$ & $\frac{-bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2t$, donne l'équation propoſée. Donc, &c.

REMARQUE.

334. S'IL arrive que $ss = \frac{ccee + cehh}{bb - af}$, il eſt clair que la valeur de tt devient nulle ou zéro, & qu'ainſi la conſtruction de l'Hyperbole devient impoſſible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation propoſée s'abaiſſe toujours, en ſorte que ſon lieu, qui devroit être une ou deux Hyperboles oppoſées, devient une ou deux lignes droites. En effet, dans notre exemple, on a réduit l'équation donnée à cette proportion $ee.\ bb - af ::$

$:: \frac{etxx}{aa} - \frac{2tsx}{a} + ss \pm tt. yy + \frac{2b}{a} xy + \frac{bb}{aa} xx + 2cy + \frac{2bc}{a} x + cc$; d'où, en effaçant tt qui eſt nul, multipliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, l'on tire $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \frac{ex}{a} - s\sqrt{bb - af}$, c'eſt-à-dire en mettant pour $-s$ ſa valeur $\frac{bce + age}{bb - af}$, & diviſant de part & d'autre par e, cette équation $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{bb-af}}{a} + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb-af}}$ ou $y = \frac{-b + \sqrt{bb-af}}{a} x + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, qui en faiſant $\frac{n}{m} = \frac{b - \sqrt{bb-af}}{a}$, & $p = \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, ſe change en cette autre $y = p - \frac{n}{m} x$ dont le lieu eſt une ligne droite que l'on conſtruit ſelon l'article 306.

La raiſon de ceci eſt évidente par la formule générale du Lemme; car effaçant dans cette formule le terme $\pm \frac{ptt}{2t}$ qui renferme le quarré tt que l'on ſuppoſe égal à zéro ou nul, elle ſe change en tranſpoſant certains termes, & extrayant les racines quarrées, en cette autre $y - \frac{n}{m} x - r = \frac{ex}{m} - s\sqrt{\frac{p}{2t}}$ ou $s - \frac{ex}{m}\sqrt{\frac{p}{2t}}$ où les inconnues x & y ne ſont plus qu'au premier degré, & dont le lieu par conſéquent devient des lignes droites.

EXEMPLE II.

335. ON demande le lieu de l'équation donnée $yy - xx + 2ay + ax = o$.

La comparaiſon des termes correſpondans donne 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme xy ne ſe trouve point dans la propoſée; d'où l'on tire $n = o$, & par conſéquent $m = e$. 2°. $\frac{p}{2t} = 1$, & partant $p = 2t$. 3°. $r = -a$.

$4°. \frac{2ps}{2t} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. $5°. rr \mp \frac{ptt}{2t} - \frac{pss}{2p} = o$, & ainſi $\mp tt = ss - \frac{2rrt}{p} = -\frac{1}{4}aa$ en mettant pour $r, \frac{2t}{p}, s$ leurs valeurs $-a, 1, \frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-tt$, & non pas $+tt$, afin que la valeur de tt ſoit poſitive. Je conſtruis enſuite le lieu en cette ſorte.

Puiſque $AD\ (r) = -a$, je mene par le point A parallélement à PM & du côté oppoſé la ligne $AD = a$; & puiſque $BE\ (n) = o$, je tire par le point D la droite DG parallèle à AP, ſur laquelle je prends la partie $DC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point C les parties CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Enſuite du ſecond diametre LK (parce qu'on a pris $-tt$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites parallèles à PM, & pour parametre la droite $KH\ (p) = tt = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que ſa portion OM ſera le lieu qu'on cherche. FIG. 179.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, une parallèle MP à AD, qui rencontre les droites AP, DG, aux points P, G ; on aura $MG = y + a$, CG ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la propriété de l'Hyperbole $LK\ (2t).\ KH\ (2t) :: \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2\ (xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt).\ \overline{GM}^2\ (yy + 2ay + aa)$; ce qui donne, en mettant pour tt ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, l'équation même propoſée $yy + 2ay - xx + ax = o$.

Il eſt évident que l'Hyperbole eſt équilatere.

REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés yy & xx ſe trouvent avec différens ſignes & ſans fraction dans une équation, où le plan xy ne ſe rencontre point, ſon lieu ſera toujours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule ſera nulle ou zéro ; & partant

$BE\,(n)=o$, & $m-c$. D'où il ſuit que la fraction $\frac{ex}{mm} - \frac{epp}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $-\frac{p}{2t}$; & qu'ainſi on aura $-\frac{p}{2t}=1$, c'eſt-à-dire que le diametre LK ſera égal à ſon parametre KH, ou, ce qui eſt la même choſe, que l'Hyperbole ſera équilatere. Or, comme la formule générale ſe change alors en celle-ci

$$yy-xx-2ry+2sx+rr\overset{+}{=}tt=o,$$

il s'enſuit qu'on peut s'en ſervir d'abord pour trouver les valeurs de r, s, t, qui ſervent à conſtruire l'Hyperbole équilatere qui eſt le lieu de l'équation donnée ; ce qui abrége le calcul.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

337. SOIENT comme dans la définition premiere, deux lignes inconnues & indéterminées $AP\,(x)$, $PM\,(y)$ qui faſſent entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM ; & ſoient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela poſé,

FIG. 180. 1°. On prendra ſur la ligne AP, la partie $AB=m$; & ayant mené les droites $BE=n$, $AD=r$ parallèles à PM, & du même côté ; on tirera par le point A la droite AE qui eſt donnée, & que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallèle à AE, ſur laquelle ayant pris les parties $DC=s$, $CK=e$ du côté que s'étend AP, on menera parallélement à PM, & du même côté la droite indéfinie CL, & la ligne $KH=p$. On décrira enſuite * entre les Aſymptotes CL, CK, une

* *Art.* 130. 131.

une Hyperbole qui paſſe par le point H. Je dis qu'elle ſera le lieu de cette équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = o.$$
$$- rx - mp$$

Car $GM = y\frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la propriété de l'Hyperbole * $CG \times GM\left(\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m}\right.$ * *Art.* 101. $\left. - \frac{erx}{m} + rs\right) = CK \times KH\,(ep)$; ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y$, &c. que ci-deſſus.

2°. On menera par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallèle à PM & du même côté ; & ayant pris ſur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallèle à AP & du même côté ; & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e ; & ayant pris ſur AP la partie $AD = r$ du côté de PM, on tirera la droite indéfinie DG parallèle à AE, ſur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend PM, & on menera parallélement à AP & du même côté, la droite indéfinie CL & la ligne $KH = p$. On décrira enſuite * entre les aſymptotes CL, CK, une Hyperbole qui paſſe par le point H. Je dis qu'elle ſera le lieu de cette ſeconde équation ou formule. FIG. 181. * *Art.* 130. 131.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = o.$$
$$- ry - mp$$

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MQ, parallèles à AP, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G ; les triangles ſemblables ABE, AQF, donneront $AB\,(m).\ AE\,(e) ::$ AQ ou $PM\,(y).\ AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB\,(m).\ BE$ $(n) :: AQ\,(y).\ QF = \frac{ny}{m}$. Et par conſéquent $GM = x$

$-\frac{ny}{m}-r$, $CG=\frac{cy}{m}-s$. Or par la propriété de l'Hyperbole $CG\times GM=CK\times KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme xy de fractions, la même seconde formule que ci-deſſus. Donc, &c.

COROLLAIRE.

338. IL eſt clair, 1°. Que le terme xy ſe rencontre toujours dans ces deux formules, puiſque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la ſuppoſer nulle pour le faire évanouir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés xx, ou yy, lequel s'évanouit ſi la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie eſt nulle.

PROPOSITION V.

Problême.

339. TROUVER *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ſe rencontre, ſans aucun des quarrés* xx & ẏy, *ou ſeulement avec l'un des deux.*

On délivrera le plan xy de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui lui répondent dans la première formule, lorſque le quarré xx s'y rencontre, & avec ceux de la ſeconde, lorſque c'eſt le quarré yy, & enfin avec celle des deux qu'on voudra, lorſque pas un des quarrés xx & yy ne s'y trouve. On tirera enſuite de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen deſquelles on décrira une Hyperbole entre ſes aſymptotes, comme on l'a enſeigné dans le Lemme précédent, en obſervant toujours de mener ou de prendre du côté oppoſé à AP & à PM les lignes dont les valeurs ſont négatives. Les exemples qui ſuivent éclairciront ces régles.

EXEMPLE I.

340. ON demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = o$.

Comme c'eſt le quarré xx qui ſe rencontre dans l'équation donnée, je choiſis la premiere formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{ms}{e} = c$, & partant $s = \frac{ec}{a}$. 3°. $\frac{ns}{e} - r = o$, parce que l'inconnue x ne ſe trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{mrx}{e} - mp = o$, parce qu'il ne ſe trouve point de termes entiérement connus; & partant $p = \frac{rs}{e} = \frac{bcc}{aa}$. Or comme les valeurs de $AP\ (m)$, $BE\ (n)$, $CD\ (s)$, $AD\ (r)$, $KH\ (p)$, ſont toutes poſitives, je conſtruis le lieu préciſément comme dans le Lemme (*fig.* 180.) en obſervant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ou $DG - DC = \frac{ex - ec}{a}$, FIG. 180. & par la propriété de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$, c'eſt-à-dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc, &c.

EXEMPLE II.

341. SOIT $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu.

Comme c'eſt le quarré yy qui ſe trouve dans l'équation donnée, je choiſis la ſeconde formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, & ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{ms}{e} = o$, & partant $s = o$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, &

FIG. 182. partant $p=\frac{ff}{a}$. Ce qui donne la conſtruction ſuivante.

Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallèle à PM & du même côté, & ayant pris ſur cette ligne, la partie $AB\,(m)=a$, je tire $BE=b=-n$ parallèle à AP & du côté oppoſé, & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e). Je prends ſur AP, la partie $AD\,(r)=c$ du côté de PM, & je tire la droite indéfinie DG parallèle à AE, & comme les points D, C, tombent l'un ſur l'autre, parce que $DC\,(s)=o$, je prends ſur cette ligne la partie $DK=e$ du côté que s'étend PM, & ayant mené parallélement à AP & du même côté la ligne $KH\,(p)=\frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie DL qui tombe ici ſur AP, je décris entre les Aſymptotes DL, DK, une Hyperbole qui paſſe par le point H. Je dis qu'elle ſera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la droite MQ parallèle à AP, & qui rencontre les parallèles AE, DG, aux points F, G, on aura GM ou $MQ+QF-FG=x+\frac{by}{a}-c$, DG ou $AF=\frac{cy}{a}$, & partant $DG\times GM=\frac{cxy}{a}+\frac{cbyy}{aa}-\frac{ccy}{a}=DK\times KH\left(\frac{eff}{a}\right)$. Ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, l'équation propoſée $xy+\frac{b}{a}yy-cy-ff=o$.

REMARQUE.

342. SI l'on prend pour l'arbitraire $AB\,(m)$ une autre valeur que a, celles de $CK\,(e)$ & de $KH\,(p)$ changeront, mais les valeurs du rectangle $CK\times KH$ (ep), & des droites $AD\,(r)$, $CD\,(s)$ demeureront toujours les mêmes; car elles ne renferment dans leurs expreſſions que les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, qui ne changent point, puiſque dans le triangle ABE l'angle ABE

eſt donné, & la raiſon $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple eſt $-\frac{}{a}$) du côté AB (m) au côté BE (n). Or comme l'Hyperbole qui doit paſſer par le point H, ſera toujours la même *, telle grandeur que l'on puiſſe donner à CK (e) & à KH (p), pourvu que le rectangle $CK \times KH$ demeure le même; il s'enſuit que l'on conſtruira toujours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puiſſe prendre pour l'arbitraire AB (m). * *Art.* 101.

EXEMPLE III.

343. IL faut conſtruire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = o$.

Comme pas un des quarrés xx & yy ne ſe trouve dans l'équation propoſée, je puis prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la propoſée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = o$, & partant $n = o$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{ms}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puiſque $\frac{ns}{e} = o$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de m, n, r, s, p, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu de la maniere qui ſuit. FIG. 183.

Puiſque AD $(r) = -b$, je mene parallèlement à PM & du côté oppoſé la ligne $AD = b$; & puiſque BE $(n) = o$, je tire la droite indéfinie DG parallèle à AP, ſur laquelle ayant pris les parties DC $(s) = a$, CK $(e) = m = a$ du côté que s'étend AP, je tire la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallèle à PM & du côté oppoſé. Je décris enſuite l'Hyperbole oppoſée à celle qui ayant pour Aſymptotes les droites CL, CK, paſſe par le point H. Je dis

que ſa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAS, fait par la droite indéfinie AP & par la ligne AS menée parallélement à PM & du même côté, ſera le lieu cherché.

Car GM ou $PG+PM=y+b$ & CG ou $CD-DG=a-x$, & par conſéquent $CG\times GM=ay-xy+ab-bx=CK\times KH(ab+cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le rectangle ab, & tranſpoſant à l'ordinaire, donne $xy-ay+bx+cc=o$ qui eſt l'équation propoſée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui paſſe par le point H; car aucun de ſes points ne pourroit tomber dans l'angle PAS, où l'on ſuppoſe que doivent tomber les points M.

REMARQUE.

344. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p=o$; on voit qu'il ſeroit alors impoſſible de décrire l'Hyperbole, qui en devroit être le lieu, puiſque ſa puiſſance, qui eſt égale au rectangle pe, ſeroit nulle. Mais alors l'équation ſe pourroit toujours abaiſſer, en ſorte que ſon lieu deviendroit une ligne droite; car effaçant par exemple dans la premiere formule du Lemme le terme mp, elle devient $xy-\frac{n}{m}xx-\frac{ms}{e}y+\frac{ns}{e}x-rx+\frac{mrs}{e}=o$, qui étant diviſée par $\frac{ex}{m}-s$ donne $y-\frac{nx}{m}-r=o$, dont le lieu * eſt une ligne droite.

* *Art.* 306.

PROPOSITION VI.

Problême.

345. CONSTRUIRE *tout lieu du ſecond degré, ſon équation étant donnée.*

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté, en ſorte que l'un des membres ſoit zéro, je diſtingue deux différens cas.

Premier cas. Lorſque le plan xy ne ſe trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés yy ou xx, le lieu ſera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes ſignes, le lieu ſera une * Ellipſe ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec différens ſignes, le lieu ſera une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées, rapportées à ſes diametres.

* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

Second cas. Lorſque le plan xy ſe trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés yy & xx ne s'y rencontre ou ſeulement l'un des deux, le lieu ſera * une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec différens ſignes, le lieu ſera * une Hyperbole rapportée à ſes diametres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes ſignes, on délivrera le quarré yy de fractions, & le lieu ſera * une Parabole lorſque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie xy eſt égal à la fraction qui multiplie le quarré xx; une * Ellipſe ou un cercle lorſqu'il eſt moindre; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées, rapportées à ſes diametres lorſqu'il eſt plus grand.

* *Art.* 339.
* *Art.* 332.
* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

On décrira le lieu ſelon l'article 310. s'il eſt une Parabole; ſelon l'article 324. s'il eſt une Ellipſe ou un cercle; ſelon l'article 332. s'il eſt une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées, rapportées à ſes diametres; & enfin ſelon l'article 339. ſi c'eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de ces quatre articles.

COROLLAIRE.

346. UNE équation du ſecond degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

* *Art.* 314. les régles preſcrites, eſt le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnue y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnue x; il s'enſuit qu'il ne peut y avoir que cette ſeule Section qui ſoit le lieu de l'équation donnée.

LIVRE HUITIEME.

Propoſition générale.

347. TROUVER *le lieu d'une infinité de points qui ayent tous certaines conditions marquées, lorſque ce lieu ne paſſe point le ſecond degré.* FIG. 184.

1°. On ſuppoſera comme connues & déterminées deux lignes droites inconnues & indéterminées AP (x), PM (y), qui faſſent entr'elles un angle APM donné ou pris à diſcrétion ; & dont l'une AP ait une origine fixe & invariable en un point A, & s'étende le long d'une ligne donnée de poſition ; & l'autre PM qui détermine toujours par ſon extrêmité M, l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & ſoit toujours parallèle à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la ſolution du Problême, & on les exprimera par des lettres ; ſçavoir, les connues par les premieres lettres de l'Alphabet, & les inconnues par les dernieres. 3°. On regardera la queſtion comme réſolue, & après en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnues x & y mêlées avec des connues. 4°. Cette équation dans laquelle on ſuppoſe que les inconnues x & y ayent au plus deux dimenſions, étant formée, on en conſtruira le lieu ſelon les regles preſcrites dans le Livre précédent ; & le lieu ainſi conſtruit réſoudra la queſtion. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

348. TROUVER dans l'angle donné BAC le point M, tel qu'ayant mené de ce point les deux droites MF, MG, qui faſſent ſur les côtés AB, AC, toujours vers la même part, des angles donnés MFB, MGC ; la FIG. 184.

droite MF ſoit toujours à la droite MG en la raiſon donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en eſt par conſéquent le lieu.

Par le point M, que l'on ſuppoſe être un des points cherchés, ayant mené la ligne MP parallèle à AC; on conſidérera les deux droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, comme connues & déterminées. On prendra ſur le côté AB la partie $AB=a$, on tirera les droites BC, BD, parallèles à MF, MG, & qui rencontrent aux points C, D, l'autre côté AC prolongé, s'il eſt néceſſaire; & on nommera les connues AC, c; BC, f; BD, g. Préſentement menant MQ parallèle à AB, les triangles ſemblables ACB, PMF, & ABD, QMG, donneront ces deux proportions: $AC(c).CB(f)::MP(y).MF=\frac{fy}{c}$, & $AB(a).BD(g)::MQ$ ou $AP(x).MG=\frac{gx}{a}$; ce qui ſatisfait à la premiere condition du Problême, puiſque les lignes MF, MG, ſont toujours ſuppoſées parallèles aux deux mêmes droites BC, BD, qui font ſur les côtés AB, AC, les angles donnés. Or par la ſeconde condition qui reſte à accomplir, il faut que $MF\left(\frac{fy}{c}\right).MG\left(\frac{gx}{a}\right)::a.b$; d'où l'on tire l'équation $y=\frac{cgx}{bf}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu ſera par conſéquent celui que l'on cherche. Il ſe conſtruit * ainſi.

* *Art.* 306.

Ayant pris ſur la ligne AP, la partie $AH=b$, ſoit menée $HE=\frac{cg}{f}$ parallèle à PM, & du même côté, & ſoit tirée la droite indéfinie AE. Je dis qu'elle ſera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené par un de ſes points quelconques M, les droites MP, MQ, parallèles aux deux côtés AC, AB, & les droites MF, MG, parallèles à BC, BD, & qui font par conſéquent ſur les deux côtés AB, AC, les angles donnés; on aura à cauſe des triangles ſembla-

bles AHE, APM, cette proportion ; AH (b). HE $\left(\frac{eg}{f}\right)$ :: AP (x). $PM(y) = \frac{egx}{bf}$, & à cauſe des triangles ſemblables ACB, PMF, & ABD, QMG, ces deux autres : $AC(c)$. CB (f) :: MP $\left(\frac{egx}{bf}\right)$. MF $= \frac{egx}{b}$; & AB (a). BD (g) :: MQ ou AP (x). MG $= \frac{gx}{a}$. Et par conſéquent $MF\left(\frac{egx}{b}\right)$. $MG\left(\frac{egx}{a}\right)$ :: a. b. Ce qui étoit propoſé.

Je n'ai réſolu cette queſtion par le calcul, que pour la rapporter à la Propoſition générale, & commencer par des Exemples ſimples & aiſés à en faire voir l'application ; car on peut réſoudre ce Problême ſans aucun calcul, & d'une maniere plus facile en cette ſorte.

Soient tirées les droites AK, AL, qui faſſent ſur AB, AC, les angles donnés KAB, LAC, & qui ſoient entr'elles en la raiſon donnée de a à b. Soient menées les droites KM, LM, parallèles aux côtés AB, AC, & qui ſe rencontrent au point M ; par où, & par le ſommet A de l'angle donné BAC, ſoit tirée la ligne AM : Je dis qu'elle ſera le lieu cherché. FIG. 185.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques E, les droites ER, ES, parallèles à AK, AL ; on aura à cauſe des triangles ſemblables AER, MAK, & AES, MAL, ces proportions ER. AK :: AE. AM :: ES. AL. Et partant ER. ES :: AK. AL :: a. b.

EXEMPLE II.

349. LES parallèles AB, CD, étant données de poſition ; trouver le lieu de tous les points M tellement placées entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites MP, MG, qui faſſent avec elles toujours vers la même part des angles donnés MPB, MGD ; elles ſoient toujours entr'elles en la raiſon donnée de a à b. FIG. 186.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées AP (x), un point quelconque A de la ligne AB, & les deux

droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, étant ſuppoſées connues & déterminées, on menera les lignes AC, AE, parallèles aux deux droites MP, MG; & on nommera les connues AC, c; AE, f; cela fait, on prolongera PM juſqu'à ce qu'elle rencontre CD en F; & les triangles ſemblables CAE, FMG, donneront $AC(c).\ AE(f) :: MF(c-y).\ MG = \frac{cf-fy}{c}$. Or ſelon la condition du Problême qui reſte à accomplir, il faut que $MP(y).\ MG\left(\frac{cf-fy}{c}\right) :: a.b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc+af}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu qui eſt * une ligne droite indéfinie HM menée parallélement à AB, en ſorte que $AH = \frac{acf}{bc+af}$, eſt par conſéquent le lieu cherché.

* *Art.* 307.

EXEMPLE III.

FIG. 187. 350. DEUX points A, B, étant donnés, en trouver un troiſieme M, tel qu'ayant mené les droites MA, MB; elles ſoient toujours entr'elles en raiſon donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points M, il eſt queſtion de décrire le lieu qui les renferme tous.

Il peut arriver trois différens cas, ſelon que a eſt moindre, plus grand, ou égal à b.

Premier cas. Par le point M, que je ſuppoſe être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne MP perpendiculaire ſur AB (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problême, on choiſit l'angle droit comme le plus ſimple), & les deux droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, étant ſuppoſées connues & déterminées; on nommera la donnée AB, c; & à cauſe des triangles rectangles APM, BPM, on aura les quarrés $\overline{AM} = xx+yy$, $\overline{BM} = cc-2cx+xx+yy$. Or par la condition du Problême, $\overline{AM}(xx+yy).\ \overline{BM}(cc-2cx+xx+yy) :: aa.bb$. D'où (en mul-

tipliant les extrêmes & les moyens & diviſant enſuite par $bb-aa$) on forme cette équation $yy+xx+\frac{2aacx}{bb-aa}-\frac{aacc}{bb-aa}=o$, qui renferme la condition du Problême, & dont le lieu qui eſt par conſéquent celui qu'on demande, ſe conſtruit par le moyen de l'article 322. (Liv. précéd.) en cette ſorte.

Soit priſe ſur la ligne AP, la partie $AC=\frac{aac}{bb-aa}$ du côté oppoſé à PM; & ſoit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE=\frac{abc}{bb-aa}$ la circonférence d'un cercle. FIG. 187.

Je dis que ſa portion DMO renfermée dans l'angle PAO, fait par la ligne AP & par la droite AO, menée parallèlement à PM & du même côté, ſera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la perpendiculaire MP ſur AB, on aura par la propriété du cercle $\overline{CD}-\overline{CP}$ ou $EP\times PD=\overline{PM}$; c'eſt-à-dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation précédente.

Si l'on ſuppoſe à préſent que les points M tombent dans l'angle EAR oppoſé au ſommet à l'angle BAO dans lequel on a ſuppoſé en faiſant le calcul qu'ils étoient ſitués, on trouvera en faiſant * $AP=-x$, & $PM=-y$, la même équation que ci-deſſus, tant par la condition du Problême, que par la propriété de la portion RME de la même circonférence que l'on vient de décrire; d'où il ſuit que cette portion eſt le lieu de tous les points cherchés M, lorſqu'ils tombent dans l'angle RAE. Et ſi l'on ſuppoſe enfin que les points M tombent dans l'angle BAR & enſuite dans l'angle EAO, on trouvera de même (en obſervant de faire $PM=-y$, lorſqu'il tombe de l'autre côté de la ligne AB; & $AP=-x$, lorſque le point P tombe de l'autre côté du point fixe A) que les portions DR, EO, de la même circonférence ſeront les lieux de ces points; & qu'ainſi la circonfé- * Art. 304.

rence entiere qui a pour diametre la ligne DE, eſt le lieu complet de tous les points requis M.

Second cas. On trouvera par un raiſonnement ſemblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa-bb} + \frac{aacc}{aa-bb} = o$, dont le lieu ſe conſtruit ainſi.

FIG. 188. Soit priſe ſur AP, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$ du côté de PM; & ſoit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{aa-bb}$ un cercle. Je dis que ſa circonférence ſera le lieu de tous les points requis M. Cela ſe prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on conſidere dans ces deux cas que la circonférence qui a pour diametre DE, & qui eſt le lieu de tous les points cherchés M, doit couper la ligne AB en deux points D, E, tels que $AD. DB :: a. b$, & $AE. EB :: a. b$; puiſque le point M tombant en D, la droite AM devient AD; & BM, BD; & de même que le point M tombant en E, la droite AM devient AE, & BM, BE: on abrégera de beaucoup les conſtructions précédentes. Car il eſt viſible qu'ayant diviſé la ligne AB prolongée, du côté qu'il ſera néceſſaire, en deux points D, E, tels que $AD. DB :: a. b$, & $AE. EB :: a. b$; la ligne DE ſera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonférence qui eſt le lieu cherché.

Troiſieme cas. Puiſque dans ce cas $a = b$, l'équation précédente ſe change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit * que ſi l'on prend AP égale à la moitié de AB & qu'on tire la droite PM perpendiculaire ſur AB, cette ligne PM indéfiniment prolongée de part & d'autre, ſera le lieu de tous les points requis M. Ce qui eſt d'ailleurs évident par les Elémens de Géométrie.

* *Art.* 307.

FIG. 189.

EXEMPLE IV.

FIG. 190. 351. DEUX lignes droites DE, DN, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point D, étant données

de poſition ſur un plan, avec un point C hors de ces lignes; ſoit imaginé un angle donné CEM ſe mouvoir par ſon ſommet E le long de DE, en ſorte que ſon côté EC qui rencontre DN en N, paſſe toujours par le même point C, & que ſon autre côté EM ſoit toujours troiſieme proportionnel à NC, CE. On demande le lieu de tous les points M dans ce mouvement.

Soient menées CA parallèle à DN; & CB qui faſſe ſur DE au point B un angle égal à l'angle donné CEM, du côté qu'il ſera néceſſaire, afin que CE tombant ſur CB, la droite EM tombe ſur DE. Cela poſé, je diſtingue la queſtion en trois différens cas : car ou le ſommet E de l'angle donné CEM ſe meut ſur la droite DE de l'autre côté du point B, par rapport au point A; ou entre les points B, A; ou enfin de l'autre côté du point A par rapport au point B.

Premier cas. Lorſque le ſommet E ſe meut ſur la ligne DE de l'autre côté du point B par rapport au point A. Ayant mené du côté du point C la ligne AQ qui faſſe ſur DE au point A l'angle BAQ égal à l'angle ABC, on tirera par l'un des points cherchés M, que l'on regarde comme donné, la ligne MP parallèle à AQ, & qui rencontre DE en P; & on aura deux triangles ſemblables CBE, EPM; car les deux angles CBE, EPM, ſont égaux chacun à l'angle donné CEM, & de plus les angles BCE, PEM, ſont auſſi égaux entr'eux; puiſque dans le triangle CBE l'angle externe CEP ou $CEM + PEM$ eſt égal aux deux internes oppoſés BCE & CBE ou CEM. Si donc l'on nomme les données AD, a; AB, b; BC, c; & les inconnues & indéterminées AP, x; PM, y; AE, z; on aura, tant à cauſe des parallèles DN, AC, que de la condition du Problême, ces proportions $AD\ (a).\ AE\ (z) :: CN.\ CE :: CE.\ EM :: CB\ (c).\ EP\ (x - z) :: BE\ (z - b).\ PM\ (y)$; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations $ax - az = cz$ & $ay = zz - bz$, qui, en prenant, pour abreger,

$f=a+c$, & faiſant évanouir z, ſe réduiſent à celle-ci $xx-\frac{bf}{a}x-\frac{ff}{a}y=o$ qui ne renferme plus que les inconnues x & y, & dont le lieu, qui eſt celui que l'on cherche, ſe conſtruit * ainſi.

* *Art.* 319.

Soit priſe ſur la ligne AP, la droite $AF=\frac{bf}{2a}$ du côté de PM; & ayant mené FL parallèle à PM, ſoit priſe ſur cette ligne du côté oppoſé à PM, la partie $FG=\frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diametre GL qui ait pour origine le point G, pour parametre $GH=\frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites LM, parallèles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Je dis que ſa portion indéfinie OM, renfermée dans l'angle PAQ, ſera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MQ parallèle à AP, & qui rencontre le diametre CL en L, on aura ML ou $PF=x-\frac{bf}{2a}$ & $GL=y+\frac{bb}{4a}$, & par la propriété de la Parabole, $\overline{ML}^2\left(xx-\frac{bf}{a}x+\frac{bbff}{4aa}\right)=LG\times GH\left(\frac{ff}{a}y+\frac{bbff}{4aa}\right)$; ce qui en tranſpoſant à l'ordinaire donne l'équation $xx-\frac{bf}{a}x-\frac{ff}{a}y=o$, qu'il falloit conſtruire.

Second cas. Lorſque le ſommet E parcourt la partie BA. Il eſt clair dans ce cas que les points M tomberont de l'autre côté de DE, puiſque l'angle donné CEM ſera toujours plus grand que l'angle CEP qui diminue continuellement. C'eſt pourquoi j'ai $PM=-y$, & comme je trouve par un raiſonnement ſemblable au précédent, la même équation; il s'enſuit que la portion AGO de la Parabole que l'on vient de décrire, ſera le lieu de tous les points M, puiſqu'elle donne auſſi par ſa propriété cette même équation.

Troiſieme cas. Lorſque le ſommet ſe meut de l'autre côté

côté du point A par rapport au point B. Il eſt clair encore dans ce cas que tous les points cherchés M doivent tomber au-deſſous de la ligne DE; & on trouvera comme dans le premier cas $AD. AE :: CN. CE :: CF. EM :: CB. EP$. Et partant $AD. CB :: AE. EP$. D'où l'on voit que EP eſt plus grande, moindre, ou égale à EA, ſelon que CB eſt plus grande, moindre, ou égale à AD; & qu'ainſi prolongeant AQ au-deſſous de DE vers K, tous les points cherchés M tombent dans l'angle BAK dans le premier de ces trois cas, dans ſon complément à deux droits DAK dans le ſecond cas, & enfin ſur la droite AK dans le troiſieme cas. Je ſuppoſe ici que CB ſoit plus grande que AD; & comme faiſant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de AP, je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la conſtruction de ce cas. C'eſt pourquoi nommant à l'ordinaire AP, x; PM, y; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{gg}{a}y = o$, dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu, qui eſt celui que l'on cherche eſt une portion indéfinie AM d'une autre Parabole que la précédente, laquelle s'étend vers le côté oppoſé, & qui ſe conſtruit * en cette ſorte.

* *Art.* 310.

Soit priſe ſur AP de l'autre côté de PM la partie $AS = \frac{bg}{2a}$; ſoit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallèle à AQ, & du côté oppoſé à PM; ſoit décrite du diametre TS qui ait pour origine le point T, pour parametre une ligne $= \frac{gg}{a}$, & pour ordonnées des droites parallèles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAK ſera le lieu de tous les points cherchés M dans ce dernier cas, où l'on ſuppoſe que CB ſurpaſſe AD.

Il eſt donc évident que le lieu cherché de tous les points M eſt compoſé de deux portions indéfinies de différentes Paraboles, dont l'une $AGOM$ s'étend du côté de C, & l'autre AM du côté oppoſé, & partent

toutes deux du point A; car le côté CE de l'angle donné CEM tombant sur CA parallèle à DN, il est clair que CN devient infinie, & qu'ainsi EM est nulle ou zéro, puisqu'on a toujours $NC.CE::CE.EM$: c'est-à-dire que le point M se confond avec le point E, qui tombe sur le point D. D'où l'on voit que AF est une ordonnée au diametre FG, & AS au diametre ST; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est générale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie AP de part & d'autre du point B les parties BO, BR, égales chacune à la quatrieme proportionnelle aux trois lignes DA, AB, BC; on menera par les points de milieu F, S, l'un de AO, l'autre de AR, les droites FG, ST, parallèles à AQ, & égales chacune à la troisieme proportionnelle à 4 AD, & à AB; sçavoir, FG du côté opposé au point C, & ST du même côté. Cela fait, on décrira deux différentes Paraboles, dont l'une aura pour diametre GF, & pour ordonnée FA; & l'autre, pour diametre TS, & pour ordonnée SA. Je dis que leurs portions indéfinies $MAGOM$ seront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car BO ou $BR = \frac{bc}{a}$, & partant AF ou $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; & de même AS ou $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Donc, &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne DE, étoit égal au complement à deux droits de l'angle CEM, sans rien changer au reste; c'est-à-dire que les points M tombassent sur la ligne EM prolongée de l'autre côté du point E: le lieu de tous les points M seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points A, B, C, étoient situés différemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement; on arriveroit toujours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être différentes des préeédentes que par quelques ſignes, & dont les lieux ſeroient par conſéquent des portions de Paraboles que l'on déeriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a propoſé ce Problême avec quelques autres dans le Journal de Parme, du mois d'Avril de l'année 1693. ee qui a donné oeeaſion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit livre à Milan, dans lequel il avoue qu'il n'a pû réſoudre eelui-ci, quoiqu'il faſſe aſſez paroître par la ſolution des autres qu'il eſt fort verſé dans la Géométrie.

EXEMPLE V.

352. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée de poſition, avec deux points fixes A, C, l'un ſur eette droite, & l'autre au dehors; ſoit décrite une Parabole AM qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne AP dont l'origine ſoit en A; & ſoit menée du point donné C une perpendiculaire CM à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points M, dont il eſt viſible qu'il y a une infinité; puiſque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles différentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie AP, dont l'origine ſoit toujours en A. FIG. 191.

Ayant mené par le point donné C la perpendiculaire CB ſur AP, & par un des points eherehés M, que l'on regarde eomme donné, les droites MP, MK, parallèles à BC, AP, & la tangente MT; on nommera les données AB, a; BC, b; & les inconnues & indéterminés AP, x; PM, y; ce qui donne $CK = b - y$, $NK = a + x$. Or par la condition du Problême, l'angle CMT eſt droit; & par conſéquent les triangles rectangles TPM, CKM, ſeront ſemblables; car ſi l'on ôte des angles droits CMT, KMP, le même angle KMT,

* *Art.* 22 & 23. les reſtes CMK, TMP, ſeront égaux. Donc TP * $(2x)$. $PM(y) :: CK(b-y) . KM(a+x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy-by+2xx+2ax=o$, dont le lieu qui eſt * *Art.* 322. celui qu'on demande, eſt * une Ellipſe que l'on conſ- * *Art.* 324. truit * en cette ſorte.

Ayant mené $AD=\frac{1}{2}b$ perpendiculaire à AP & du côté de PM, & tiré la droite indéfinie DL parallèle à AP, on prendra ſur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté oppoſé à PM; & de part & d'autre du point E les parties EF, EG égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{8}bb}$. Enſuite de l'axe FG, qui ait pour parametre une ligne GH double de FG, on décrira une Ellipſe. Je dis que ſa portion AMO renfermée dans l'angle PAD, eſt le lieu de l'équation précédente; & par conſéquent de tous les points cherchés M, lorſqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant PM, s'il eſt néceſſaire, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & $EL=\frac{1}{2}a+x$, & par la propriété de l'Ellipſe, $FL\times LG$ ou $EF-\overline{EL}$ $(\frac{1}{8}bb-ax-xx)$. $\overline{LM}$ $(\frac{1}{4}bb-by+yy) :: FG . GH :: 1 . 2$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb-2ax-2xx=\frac{1}{4}bb-by+yy$. Donc, &c.

Si l'on ſuppoſe à préſent que les points M tombent dans les angles BAD, BAR, on trouvera toujours la même équation que ci-deſſus, tant par la condition du Problême que par la propriété de l'Ellipſe; en obſervant de faire $AP=-x$, & $PM=-y$, lorſque le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & PM, de l'autre côté de la ligne AP. D'où il ſuit que les portions de l'Ellipſe, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles, ſont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il eſt impoſſible qu'aucun des points cherchés M, tombe dans l'angle PAR, oppoſé au ſommet à l'angle BAD dans lequel eſt ſitué le point donné C, d'où doivent partir toutes les perpendiculaires aux Paraboles. Car ſi d'un point quelconque pris

dans cet angle PAR, on mene des droites comme MP, MT, perpendiculaires sur AP & CM, il est visible que les points P, T, tomberont du même côté du point A, & par conséquent que cette ligne MT ne pourra être tangente en M comme le demande la question.

Si l'on suppose que AP (x) devienne nulle ou zéro, l'équation précédente $yy - by + 2xx + ax = o$ se changera en celle-ci $yy - by = o$, dont les deux racines sont $y = o$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant AO parallèle & égale à BC, le lieu des points cherchés M passera par les deux points A, O. On prouvera de même en supposant que le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & faisant $AP\,(-x) = AB\,(a)$, que ce même lieu passera par les points B, C; de sorte que l'Ellipse doit être décrite autour du rectangle $ABCO$. Ceci donne lieu à une nouvelle construction que voici.

Soit formé le rectangle $ABCO$, & soit décrite * autour de ce rectangle une Ellipse, dont l'axe FG parallèle aux côtés AB, OC, soit à son parametre GH, comme 1 est à 2. Il est évident qu'elle sera le lieu cherché. * *Art.* 176.

REMARQUE I.

353. SI la nature des lignes courbes, telles que AM, étoit exprimée par l'équation générale $y^n = x^m a^{n-m}$ (les lettres m, n, marquent les exposans des puissances de y & x, tels qu'ils puissent être) qui renferme * non-seulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous les degrés à l'infini; on auroit TP * $\left(\frac{n}{m}x\right)$. $PM\,(y)$ :: $CK\,(b-y)$. $KM\,(a+x)$: ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = o$, dont le lieu, qui est celui qu'on cherche, est une Ellipse que l'on construira selon l'article 322. ou bien selon l'article 176. si l'on observe que cette Ellipse doit passer autour du rectangle donné $ABCO$, & que son axe FG parallèle aux côtés AB, OC, doit être * *Art.* 229. * *Art.* 237.

à ſon parametre GH, en la raiſon donnée de m à n.

REMARQUE II.

FIG. 191. 354. SI le centre E de l'Ellipſe qu'on vient de décrire, tomboit ſur l'origine A de l'axe commun AP de toutes les Paraboles AM; & l'axe FG de l'Ellipſe ſur l'axe AP des Paraboles: cette Ellipſe couperoit toutes ces différentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Théorême de la maniere qui ſuit.

FIG. 192. Soient une infinité de Paraboles comme AM, de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne AP, dont l'origine eſt toujours au même point A; & ſoit une Ellipſe qui ait pour centre le point A, & dont l'axe FG ſitué ſur AP ſoit à ſon parametre, comme le nombre m expoſant de la puiſſance de $AP\,(x)$, eſt au nombre n expoſant de la puiſſance de $PM\,(y)$, dans l'équation générale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles AM. Je dis que cette Ellipſe coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point M, où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente MT à cette Parabole, & MS perpendiculaire à cette tangente; il eſt queſtion de prouver que MS touche l'Ellipſe au point M. Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire MP ſur l'axe, & ayant nommé les indéterminées AP, x; PM y; & la donnée FG, $2t$; on aura par la propriété de l'Ellipſe $FP \times PG\,(tt-xx).\ \overline{PM}\,(yy) :: m.n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cauſe des angles droits TPM, TMS, il vient TP * $\left(\frac{n}{m}x\right).\ PM\,(y) :: PM\,(y).\ PS = \frac{myy}{nx}$, & par conſéquent AS ou $AP + PS = \frac{nxx+myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur que l'on vient de trouver $ntt-nxx$. D'où l'on voit que $AP.AF :: AF.AS$, & qu'ainſi * la ligne MS touche l'Ellipſe au point M. *Ce qu'il falloit, &c.*

* *Art.* 237.

* *Art.* 57.

EXEMPLE VI.

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles, qui ayent toutes pour Aſymptotes communes les mêmes droites AP, AO, données de poſition, qui ſont entr'elles un angle droit PAO; & ſoient conçues partir d'un point donné C une infinité de perpendiculaires comme CM à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points M, où chacune des droites CM rencontre l'Hyperbole à laquelle elle eſt perpendiculaire. FIG. 193.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple précédent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion TP * (x). $PM(y) :: CK(b-y) . KM(a-x)$; ce qui donne cette équation $yy-by-xx+ax=o$; dont voici * le lieu. * Art. 107. * Art. 330. ou 335.

Ayant pris ſur l'Aſymptote AO parallèle à PM, la partie $AD=\frac{1}{2}b$, & mené DL parallèle à AP; on prendra ſur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ ſelon que a eſt plus grand ou moindre que b. On décrira enſuite de la ligne FG, comme premier axe dans le premier cas, & comme ſecond dans le deuxieme, deux Hyperboles oppoſées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle PAO, ſeront le lieu de cette équation, & par conſéquent celui de tous les points cherchés M.

Car prolongeant PM (s'il eſt néceſſaire) juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG, en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & la partie $EL=x-\frac{1}{2}a$; & * par la propriété des Hyperboles équilateres $\overline{EL}^2 \pm \overline{EF}^2 (xx-ax+\frac{1}{4}bb)=\overline{LM}^2(\frac{1}{4}bb-by+yy)$. Donc, &c. * Art. 127.

Si $a=b$, la conſtruction précédente n'a plus de lieu, car la valeur du demi-axe EF ou EG devient nulle. Et comme l'équation précédente devient celle-ci $yy-ay-xx-ax=o$, ou $yy-ay+\frac{1}{4}aa=xx-ax+\frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = x$, & $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = a - x$; il s'enſuit que ſi l'on acheve le rectangle
Fig. 194. $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales AC, BO : elles ſeront le lieu de tous les points cherchés M. Car la diagonale AC eſt le lieu de la premiere équation $y = x$, & l'autre diagonale BO eſt le lieu de la deuxieme $y = a - x$.

REMARQUE I.

356. SI la nature des lignes courbes qui ont pour Aſymptotes les droites AB, AO, étoit exprimée par
Fig. 193. l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui renferme * les Hy-
* Art. 229. perboles de tous les degrés à l'infini, on auroit TP *
* Art. 237. $\left(\frac{n}{m}x\right).PM(y) :: CK(b-y).KM(a-x)$; ce qui donne $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = o$, dont le lieu
* Art. 330. ſe conſtruit * ainſi.

Ayant trouvé le point E comme dans l'exemple, on prendra ſur DL de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m}{4n}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa}$; ſelon que naa eſt plus grand ou moindre que mbb. Enſuite de la ligne FG comme premier axe dans le premier cas, & comme ſecond dans le deuxieme, qui ſoit à ſon parametre en la raiſon donnée de m à n, on décrira deux Hyperboles oppoſées : leurs portions renfermées dans l'angle OAB ſeront le lieu qu'on cherche.

Si $a.b :: \sqrt{m}.\sqrt{n}$, l'équation $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = o$
Fig. 194. ſe change en celle-ci $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax} = o$, ou $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m} + \frac{naa}{4m}} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient

vient $y-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}=x\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$, ou $y=x\sqrt{\frac{n}{m}}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}-y=x\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$ ou $y=a\sqrt{\frac{n}{m}}-x\sqrt{\frac{n}{m}}$.

D'où il suit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les diagonales BO, AC; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés M: car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y=x\sqrt{\frac{n}{m}}$, & l'autre diagonale BO le lieu de la seconde $y=a\sqrt{\frac{n}{m}}-x\sqrt{\frac{n}{m}}$.

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné $ABCO$; & comme l'axe FG, parallèle aux côtés AB, OC, doit être à son parametre en la raison donnée de m à n, il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.) FIG. 193.

REMARQUE II.

357. SI le centre E de l'Hyperbole BFC tomboit sur le point A, & son axe FG sur la ligne AP; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites AP, AO; ce qu'on peut énoncer ainsi. FIG. 193.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP, AO, qui font entr'elles un angle droit; & soit une Hyperbole ordinaire FM qui ait pour centre le point A, & dont le premier axe FG situé sur AP, soit à son parametre comme le nombre m exposant de la puissance de AP (x) est au nombre n exposant de la puissance de PM (y) dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles MAM. Je dis que l'Hyperbole FM coupe à angles droits toutes ces différentes Hyperboles. FIG. 194.

Ayant mené par le point M où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente MT à cette Hyperbole, & une perpendiculaire MS à cette tangente; il s'agit de prouver que l'angle TMS ſera droit. Pour le faire, on tirera MP perpendiculaire ſur l'Aſymptote AP; & ayant nommé les indéterminés AP, x; PM, y; & la donnée $FG, 2t$; on aura par la propriété de l'Hyperbole FM cette proportion $FP \times PG\ (xx - tt).\ \overline{PM}\ (yy) :: m.\ n$, & partant $myy = nxx - ntt$. Or à cauſe des angles droits TPM, TMS, il vient TP * $\left(\frac{n}{m}x\right).\ PM\ (y) :: PM\ (y).\ PS = \frac{myy}{nx}$. Et par conſéquent AS au $AP - PS = \frac{nxx - myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que AS eſt troiſieme proportionnelle à AP, AF; & qu'ainſi * la ligne MS touche l'Hyperbole FM au point M. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 237.

* *Art.* 121.

EXEMPLE VII.

FIG. 196. 358. LA Parabole BAC étant donnée, on demande le lieu de tous les points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes MB, MC, à cette Parabole; l'angle BMC qu'elles comprennent ſoit toujours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné BMC ſoit aigu, obtus, ou droit; ce qui fait trois différens cas.

Premier cas. Lorſque l'angle donné BMC eſt aigu. Ayant mené * l'axe AD de la Parabole donnée BAC, qui rencontre les tangentes MB, MC, aux points F, G, on tirera ſur cet axe des points touchans B, C, & du point de concours M, les perpendiculaires BD, CE, MP. Et ayant mené MN qui faſſe ſur l'axe AD l'angle FNM égal à l'angle FMG complément à deux droits de l'angle donné BMC, on nommera les inconnues & indéterminées AP, x; PM, y; AF, s; AG, t;

* *Art.* 160.

& le parametre de l'axe AD, ſçavoir, AV, a ; lequel eſt donné, puiſque la Parabole BAC eſt donnée. Cela poſé ; à cauſe du triangle rectangle FPM, on aura le quarré $\overline{FM} = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant diviſé par $FG\,(s-t)$ donnera $\frac{ss-2sx+xx+yy}{s-t} = FN$, à cauſe des triangles ſemblables FGM, FMN ; & partant PN ou $FP - FN = \frac{sx+tx-st-xx-yy}{s-t}$. Je cherche à préſent par le moyen de la Parabole donnée BAC des valeurs de $s+t, st$, & $s-t$ par rapport à x & y, afin qu'étant ſubſtituées, dans la valeur de PN, cette ligne ne renferme plus dans ſon expreſſion d'autres inconnues que x & y. Ce que je fais ainſi.

Les triangles ſemblables FPM, FDB ; & GPM, GEC, donnent $FP\,(s-x).\,PM\,(y) :: FD^{*}\,(2s).\,BD^{*}\,(\sqrt{as})$. * *Art.* 22. Et $GP\,(x-t).\,PM\,(y) :: GE\,(2t).\,CE\,(\sqrt{at})$. D'où je * *Art.* 7. forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = o$, & $tt - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = o$; c'eſt-à-dire (en faiſant $p = 2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = o$, & $tt - pt + xx = o$. Je retranche la ſeconde équation de la premiere, & j'ai $ss - tt - ps + pt = o$, qui étant diviſée par $s-t$ donne $s+t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps - ts = ps - xx$ à cauſe de la premiere équation, d'où je tire $st = xx$. Si l'on ôte $4xx$ valeur de $4st$ de pp valeur de $ss + 2ts + tt$, on formera enfin cette égalité $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$ en mettant pour p ſa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à préſent à la place de $s+t$, st, & $s-t$, leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, xx, & $\frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$ dans $\frac{sx+tx-st-xx-yy}{s-t}$, on trouvera $PN = \frac{4xy-ay}{4\sqrt{ax+yy}}$. Or ſi

l'on prend sur l'axe la partie NQ égale au parametre AV (a), & qu'on tire QT parallèle à PM, & qui rencontre en T la droite MN prolongée autant qu'il sera nécessaire; il est visible que la ligne QT sera donnée, puisque dans le triangle rectangle NQT, l'angle QNT qui est égal à l'angle donné BMC est donné, & que de plus le côté NQ, qui est égal au parametre AV de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cause des triangles semblables NPM, NQT, on aura cette proportion, $NP\ \left(\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}\right)$. $PM\,(y) :: a.\ b$, & partant $4a\sqrt{yy+ax} = 4bx - ab$, c'est-à-dire en ôtant les incommensurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = o$, dont le lieu (qui est celui qu'on cherche) se construit * en cette sorte.

* *Art.* 330 & 332.

Soit prise sur l'axe AD de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ du côté de PM; & de part & d'autre du point H les parties HI, HK, égales chacune à $\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui soit à son parametre KL comme aa est à bb, une Hyperbole KM. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$, & par la propriété de l'Hyperbole $\overline{HP} - \overline{HK}\,(xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa).\ \overline{PM}\,(yy) :: IK.KL :: aa.bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation précédente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas FN sera toujours moindre que FP; puisque l'angle FNM, qu'on a pris égal au complément à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ la valeur $FP - FN$ doit être positive; & par conséquent x doit toujours surpasser $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait

une portion de l'Hyperbole oppoſée à KM qui ſoit renfermée dans l'angle PAV fait par la ligne AP & par la droite AV menée parallèlement à PM & du même côté, elle ne peût pas néanmoins faire partie du lieu des points M; parce que AI étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée AP qui ſeroit alors moindre que AI, ſeroit à plus forte raiſon moindre que $\frac{1}{4}a$.

Second cas. Lorſque l'angle donné eſt obtus. En ſuppoſant que les points M tombent dans l'angle PAV, & par un raiſonnement ſemblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par conſéquent la conſtruction du lieu demeurera la même. Mais il faut obſerver dans ce ſecond cas que FN ſera plus grande que FP, & qu'ainſi la valeur $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de $FP-FN$ deviendra négative; d'où il ſuit que x ſera toujours moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché ſera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle ſe trouve renfermée dans cet angle PAV. Et comme en ſuppoſant que les points M tombent dans l'angle DAV, on trouve encore la même équation, il s'enſuit que cette Hyperbole entiere ſera le lieu de tous les points cherchés M.

De-là il eſt évident que ſi une Hyperbole KM eſt le lieu de tous les points M lorſque l'angle donné BMC eſt aigu, ſon oppoſée ſera le lieu de tous ces points lorſque l'angle donné ſera égal au complément à deux droits de l'angle BMC, parce qu'alors les lignes données a & b qui déterminent la conſtruction des Hyperboles, demeurent les mêmes.

Troiſieme cas. Lorſque l'angle donné eſt droit. Il eſt clair que FN eſt alors égale à FP, & qu'ainſi la valeur $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de $FP-FN$ ſera nulle ou zéro. D'où l'on voit * que ſi l'on prend ſur l'axe AD prolongé vers ſon origine A la partie $AP=\frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie PM; cette ligne qui n'eſt autre

FIG. 196. 197.

* *Art.* 306.

ligne AR dont l'origine ſoit en A, on tire d'un point quelconque M de l'Hyperbole KM deux tangentes MB, MC, à cette Parabole : je dis que l'angle BMC qu'elles comprennent, ſera toujours égal à la moitié de l'angle fait par les Aſymptotes ; & que ſi l'on prend le point M ſur l'Hyperbole oppoſée, l'angle compris par les tangentes, ſera toujours égal au complément à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Aſymptotes.

EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie BAP étant donnée de poſition ſur un plan avec deux points fixes A, D, l'un ſur cette ligne & l'autre au dehors ; on demande le lieu de tous les points M, dont la propriété ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes A, D, les droites MA, MD : la ligne AM ſoit toujours égale à la partie ME de l'autre droite DM, priſe entre le point M & le point E où elle rencontre la ligne MP. FIG. 198.

Du point donné D & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires BD, MP, ſur la ligne AP, on nommera les données AB, $2a$; BD, $2b$; & les inconnues & indéterminées AP, x ; PM, y : & on aura $AP = PE$; puiſque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles ſemblables EBD, EPM, donnent EB ou $AE - AB$ $(2x - 2a)$. BD $(2b)$ :: EP (x). PM (y). En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problême, & dont le lieu qui eſt * une Hyperbole équilatere entre les Aſymptotes ſe conſtruit ainſi. * *Art.* 337.

Soit tirée la ligne AD que l'on diviſera par le milieu en C, par où l'on menera les droites CF, CG, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à AP : ſoient décrites entre les Aſymptotes CF, CG, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point C, par les points D, A, * * *Art.* 130. 131.

* *Déf.* 16. III. les deux Hyperboles oppoſées DM, AM, qui ſont * équilateres. Je dis qu'elles ſeront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car les Aſymptotes CF, CG, diviſent les droites AB, BD en deux parties égales aux points L, K, puiſque AD eſt diviſée par le milieu en C; & partant lorſque les points P tombent ſur AB prolongée indéfiniment du côté de B, comme l'on vient de ſuppoſer en faiſant le calcul, la ligne PL ou $CH = x - a$, $HM = y - b$; * *Art.* 100. & par la propriété * de l'Hyperbole $CH \times HM\ (xy - ay - bx + ab) = CK \times KD\ (ab)$: ce qui donne $xy - ay = bx$.

Si l'on ſuppoſe à préſent que les points P tombent ſur BA indéfiniment prolongée du côté de A, ou ſur la partie déterminée AB; on trouvera toujours (en obſervant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$, lorſqu'ils tombent de l'autre côté du point A & de la ligne AP) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Problême, que par la propriété de l'Hyperbole AM ou DM. Donc, &c.

COROLLAIRE.

361. DE-LA il eſt évident que les parties MR, MS des deux droites AM, DM, compriſes entre le point M & l'une ou l'autre des Aſymptotes, ſont égales entr'elles. Car, 1°. Lorſque l'Aſymptote, comme CF, eſt parallèle à la ligne AP, l'angle RSM eſt égal à l'angle AEM, & l'angle SRM à l'angle MAE. 2°. Lorſque l'Aſymptote, comme CG, eſt perpendiculaire à AP, l'angle RSM ſera le complément à un droit de l'angle AEM à cauſe du triangle rectangle SLE, & de même l'angle SRM ou ſon oppoſé au ſommet ARL eſt le complément à un droit de l'angle EAM à cauſe du triangle rectangle RAL. Donc puiſque les angles EAM, AEM, ſont égaux, il s'enſuit que le triangle RMS ſera iſoſcelle, & qu'ainſi les côtés MR, MS, ſeront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Théorême ſuivant.

Si l'on mene d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatere, deux droites MD, MA, aux extrêmités d'un de ſes premiers diametres AD, leſquelles rencontrent l'une ou l'autre Aſymptote aux points R, S: je dis que les parties MR, MS, de ces deux droites ſeront égales entr'elles.

EXEMPLE IX.

362. DEUX cercles EGF, BNO, dont les centres ſont C, A, étant donnés, & ayant mené par un point quelconque G du cercle EGF une tangente indéfinie GNO qui coupe l'autre cercle BNO en deux points N, O, par leſquels ſoient tirées les tangentes NM, OM; on demande le lieu de tous les points de concours M. FIG. 199.

Ayant tiré MP perpendiculaire ſur CA, qui paſſe par les centres C, A, des cercles donnés; on menera les droites CG, AM, qui ſeront parallèles, puiſque l'une & l'autre eſt perpendiculaire ſur la même droite GO, qu'elles rencontrent aux points G, Q; & on nommera les données AB ou AO, a; CE ou CF ou CG, b; CA, c; & les inconnues & indéterminées AP, x, PM, y. Cela fait, les triangles rectangles ſemblables AOM, AQO, donneront $AM\,(\sqrt{xx+yy}).\ AO\,(a)::$ $AO\,(a).\ AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant CH parallèle à GO, qui rencontre en H, MA prolongée, s'il eſt néceſſaire, on aura à cauſe des triangles rectangles ſemblables MAP, CAH, cette proportion: $PA\,(x).\ AM$ $(\sqrt{xx+yy})::AH$ ou $CG - AQ\left(b - \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}\right).\ AC\,(c)$; ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'eſt-à-dire, en ôtant les incommenſurables, l'équation $yy + \frac{bb-cc}{bb}\,xx$ $- \frac{2aac}{bb}\,x - \frac{a^4}{bb} = o$, dont le lieu eſt * une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole ſelon que $CE\,(b)$ eſt égale, * *Art.* 345.

plus grande, ou moindre que CA (c). Voici la conſtruction du dernier cas.

Soit priſe ſur la ligne AP la partie $AR = \frac{aac}{cc-bb}$ du côté oppoſé à PM; & de part & d'autre du point R les parties RI, RK, égales chacune à $\frac{aab}{cc-bb}$; & ſoit décrite du premier axe IK qui ait pour parametre $KL = \frac{2aa}{b}$, une Hyperbole. Je dis que ſa portion indéfinie DM renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par la droite AD menée parallèlement à PM & du même côté, ſera le lieu de cette équation.

Car par la propriété de l'Hyperbole, $\overline{KP}^2 - \overline{RI}^2 \left(\frac{a^4+2aacx}{cc-bb} + xx\right) . \overline{PM}^2 (yy) :: IK \left(\frac{2aab}{cc-bb}\right) . KL \left(\frac{2aa}{b}\right)$; ce qui redonne l'équation précédente.

Si l'on ſuppoſe à préſent que les points M tombent dans l'angle KAD qui eſt à côté de l'angle PAD, on trouvera encore (en faiſant $AP = -x$) la même équation; d'où il ſuit que la portion déterminée ID de l'Hyperbole IM, avec la moitié entiere de l'Hyperbole qui lui eſt oppoſée, ſera le lieu de ces points, & qu'ainſi ces deux Hyperboles oppoſées compoſent le lieu complet de tous les points cherchés M: où l'on doit obſerver que la portion SIT renfermée dans le cercle BNO eſt inutile, puiſqu'aucun des points de concours M des deux tangentes NO, OM, à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il eſt à propos de remarquer que $RA \left(\frac{aac}{cc-bb}\right) = \sqrt{\overline{KR}^2 + \frac{1}{4} IK \times KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ainſi puiſque le rectangle $IK \times KL$ vaut le quarré de la moitié du ſecond axe, le point A ſera * l'un des foyers de l'Hyperbole IM. Or puiſque AI ou $AR - RI = \frac{aac-aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{aac+aab}{cc-bb}$

* *Art.* 74.

$= \frac{aa}{c-b}$, il s'enſuit qu'on peut abréger la conſtruction précédente en cette ſorte.

Soient priſes ſur la ligne AC du côté de C, les parties AI, AK, troiſiemes proportionnelles à $AF\ (c+b)$, $AB\ (a)$, & à $AE\ (c-b)$, $AB\ (a)$; & ſoient décrites du premier axe IK, & du foyer A * deux Hyperboles oppoſées. Il eſt évident qu'elles ſeront le lieu de tous les points cherchés M. * *Art.* 76.

Lorſque $CE\ (b)$ eſt plus grande que $CA\ (c)$, la conſtruction de l'Ellipſe qui eſt le lieu des points cherchés M, ſe fera de la même maniere que pour l'Hyperbole, en obſervant de prendre la partie AK de l'autre côté du point A par rapport au point C. Et enfin lorſque $CE\ (b) = CA\ (c)$, il n'y aura qu'à prendre ſur la ligne AC du côté de C, la partie AI troiſieme proportionnelle à AF, AB, & décrire enſuite une Parabole qui ait pour foyer le point A, & pour axe la ligne IA dont l'origine ſoit en I. FIG. 200.

COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

363. DE-LA il eſt évident que ſi de l'un des foyers A d'une Ellipſe ou de deux Hyperboles oppoſées, dont le premier axe eſt IK, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris ſur cet axe les parties AE, AF, troiſiemes proportionnelles à AK, AB, & à AI, AB, (ſçavoir AE du côté du point K, & AF du côté du point I), on décrive du diametre EF un cercle EGF: il eſt évident, dis-je, que ſi l'on tire d'un point quelconque M de la Section, deux tangentes MN, MO, au cercle BNO, la ligne ON qui joint les points touchans étant prolongée, s'il eſt néceſſaire, touchera toujours l'autre cercle EGF. FIG. 199.

COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. IL ſuit encore de la réſolution de ce Problême, que ſi du foyer A d'une Parabole IM dont l'axe IA a FIG. 200.

ſon origine en I, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris ſur l'axe du côté de ſon origine, la partie AF troiſieme proportionnelle à AI, AB, on décrive un cercle AGF du diametre AF; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque M de la Parabole deux tangentes MN, MO, au cercle BNO: la ligne NO qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il eſt néceſſaire, touchera toujours le cercle AGF en un point G.

EXEMPLE X.

FIG. 201. 202. 203. 365. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée ſur un plan, avec un point fixe F hors d'elle; trouver le lieu de tous les points M, dont la propriété ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire MP ſur AP, & au point P une ligne droite MF; la raiſon de MP à MF ſoit toujours la même, que celle de la donnée a à la donnée b.

Ayant mené du point donné F ſur la ligne AP la perpendiculaire FA, & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des cherchés, une parallèle MQ à AP, on nommera la donnée AF, c; & les inconnues & indéterminées AP, x; PM, y; qui font entr'elles un angle droit APM. Cela poſé, le triangle rectangle MQF donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2 (xx)$, & à cauſe de la condition marquée dans le Problême, on aura $\overline{MP}^2 (yy) . \overline{MF}^2 (cc - 2cy + yy + xx) :: aa . bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = o$, dont il s'agit maintenant de conſtruire le lieu. Pour en venir à bout, il faut diſtinguer trois différens cas, ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à b.

Premier cas. En diviſant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{2aac}{aa-bb} y + \frac{aa}{aa-bb} xx + \frac{aacc}{aa-bb} = o$,

* *Art.* 324. dont le lieu eſt une Ellipſe * que l'on conſtruit en cette ſorte.

Soit prise sur AF du côté de F, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$; FIG. 201. & ayant mené par le point C une parallèle KH à AP, soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point C, les parties CH, CK, égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$. Ensuite de l'axe KH qui soit à son parametre KL comme $aa-bb$ est à aa, soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation précédente, & par conséquent de tous les points cherchés M.

Car par la propriété de l'Ellipse, $KE \times EH$ ou $\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2 \left(\frac{bbcc}{aa-bb} - xx\right)$. $EM^2 \left(\frac{a^4cc}{aa-bb^2} - \frac{2aacy}{aa-bb} + yy\right) :: KH. KL :: aa-bb. aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que ci-dessus.

Puisque $\overline{CH}^2. \overline{CB}^2 :: KH. KL :: aa-bb. aa$, il s'ensuit que le demi-axe CB ou $CD = \frac{abc}{aa-bb}$; & qu'ainsi DF ou $DC+CF = \frac{abc+bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}$, & FB ou $CB-CF = \frac{abc-bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}$. Donc $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$; & partant le point F est * l'un des foyers de cette Ellipse qui a pour grand axe la ligne BD. Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la précédente: La voici. * Art. 35.

Soient prises sur FA du côté de A la partie $FB = \frac{bc}{a+b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a-b}$. Ayant pris DG égal à BF du côté de F; soit décrite des foyers F, G, & de l'axe BD * une Ellipse; il est évident qu'elle satisfera à la question. * Art. 36.

Second cas. On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx - \frac{aacc}{bb-aa} = o$, parce que a est moindre que b. Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.). Après

avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas précédent, on trouvera cette conſtruction.

FIG. 202. Soient priſes ſur FA du côté du point A les parties $FB=\frac{bc}{b+a}$, $FD=\frac{bc}{b-a}$. Ayant pris DG égal à BF du côté oppoſé au point F, ſoient * décrites des foyers F, G, & du premier axe BD, deux Hyperboles oppoſées BM, DM. Elles ſeront le lieu de tous les points cherchés M.

* *Art.* 76.

Troiſieme cas. L'équation générale $aayy-bbyy-2aacy+aaxx+aacc=o$ ſe changeant en cette autre $xx-2cy+cc=o$, parce que $a=b$, ſon lieu eſt une Parabole qu'il eſt facile de conſtruire ſelon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & ſans avoir beſoin d'aucun calcul; que ſi l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne AP, & pour foyer le point F, ſelon qu'il eſt enſeigné dans la définition premiere du premier Livre; elle ſera le lieu requis.

FIG. 203.

COROLLAIRE I.

366. IL eſt clair dans le premier cas, que $CF\left(\frac{bbc}{aa-bb}\right)$ $CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right)::CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right).CA\left(\frac{aac}{aa-bb}\right)::a.b$; & l'on trouve la même choſe dans le ſecond cas: ce qui donne lieu à ce Théorême.

FIG. 201. 202. Si dans une Ellipſe ou deux Hyperboles oppoſées qui ont pour centre le point C, pour foyers les deux points F, G, & pour premier axe la ligne BD, on prend CA troiſieme proportionnelle à CF, CB, du côté du foyer F; & qu'on mene la droite indéfinie AP perpendiculaire ſur BD: je dis que ſi d'un point quelconque M de la Section, l'on tire ſur AP la perpendiculaire MP, & au foyer F la droite MF; la raiſon de MP à MF, ſera toujours la même que du premier axe BD à la diſtance FG des foyers.

Dans les Corollaires ſuivans cette ligne droite indéfinie AP s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections ; auſſi bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il eſt facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, pour directrice une ligne donnée de poſition AP, & qui paſſe par un point donné M; car tirant au foyer F la ligne MF, & ſur la directrice AP la perpendiculaire MP, & nommant les données MP, a; MF, b; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points M tels que MP ſoit toujours à MF comme a eſt à b.

COROLLAIRE II.

367. SI l'on joint deux points quelconques M, N, d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en C; & que du foyer F, on tire les droites FM, FN, FC: je dis que la ligne FC coupe en deux parties égales l'angle NFH complément à deux droits de l'angle NFM, lorſque les points M, N, tombent ſur une Parabole, Ellipſe, ou Hyperbole; & l'angle NFM, lorſqu'ils tombent ſur deux Hyperboles oppoſées. FIG. 204. 205.

Car tirant les perpendiculaires MP, NQ, ſur la directrice, & la ligne ND parallèle à MF; les triangles ſemblables MPC, NQC, & MFC, NDC, donnent $MP. NQ :: MC. NC :: MF. ND$. Et partant $MP. MF :: NQ. ND$. Or par la propriété de la Section conique, qui a pour directrice la ligne PQ, & pour foyer le point F, on aura $MP. MF :: NQ. NF$. Les lignes ND, NF, ſeront donc égales entr'elles; c'eſt pourquoi dans le premier cas l'angle NDF ou CFH ſera égal à l'angle CFN, & dans le ſecond l'angle FDN ou CFM ſera égal à l'angle CFN. *Ce qu'il falloit prouver.*

COROLLAIRE III.

368. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipſe, ou Hyperbole qui paſſe par trois FIG. 204.

points donnés M, N, O, & qui ait pour foyer le point donné F.

Soient menées par le foyer F, les droites FC, FE, qui diviſent par le milieu les angles NFH, NFK, complemens à deux droits des angles donnés MFN, OFN; & par les points C, E, où elles rencontrent les lignes MN, ON, qui joignent les points donnés, ſoit tirée une ligne droite indéfinie CE. Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne CE, pour foyer le point F, & qui paſſe par le point M: il eſt clair, ſelon le Corollaire précédent, qu'elle paſſera auſſi par les deux autres points N, O.

COROLLAIRE IV.

FIG. 205. 369. ON tire encore du Corollaire ſecond une maniere de décrire deux Hyperboles oppoſées qui ayent pour foyer le point F; & dont l'une d'elles paſſe par deux points donnés M, O, & l'autre par un point donné N.

Soit menée par le point F la ligne FE qui diviſe par le milieu l'angle HFO complément à deux droits de l'angle MFO formé par les droites FM, FO, tirées du point F aux deux points M, O, qui doivent ſe trouver dans la même Hyperbole; & ſoit encore menée par le même point F la ligne FC, qui diviſe en deux parties égales l'angle MFN formée par les droites FM, FN, tirées du point F aux deux points M, N, qui doivent tomber ſur les deux Hyperboles oppoſées. Par les points E, C, où les lignes FE, FC, rencontrent les droites MO, MN, qui joignent les points donnés, ſoit tirée une ligne droite indéfinie EC. Soient enfin décrites deux Hyperboles oppoſées, qui ayent pour foyer le point F, pour directrice la ligne EC, & dont l'une d'elles paſſe par le point M: il eſt évident qu'elles ſatisfont à la queſtion.

COROLLAIRE V.

COROLLAIRE V.

370. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire ſecond ; il eſt viſible que l'angle MFN différence de l'angle CFM & de ſon complément à deux droits CFH ou CFN, diminue à meſure que le point N approche du point M ; de ſorte qu'il s'évanouit tout-à-fait, lorſque le point N tombe ſur le point M. L'angle CFM ſera donc égal alors à ſon complément à deux droits, & par conſéquent il ſera droit. Or comme la ligne MN devient alors la tangente MT, puiſqu'elle paſſe * par deux points infiniment proches de la courbe ; on voit naître une maniere générale & toute nouvelle de mener d'un point donné M ſur une Section conique, une tangente MT, un foyer F avec l'axe qui paſſe par ce foyer étant donnés. FIG. 204. * *Art.* 188.

Car ayant trouvé la directrice comme il eſt enſeigné dans le Corollaire ſecond, on menera du point donné M au foyer F la droite MF, ſur laquelle on tirera la perpendiculaire FT qui rencontre la directrice en T, par où & par le point donné M on tirera la tangente cherchée MT.

EXEMPLE XI.

371. DEUX angles KAM, KBM, mobiles autour des points fixes A, B, étant donnés ſur un plan, avec une ligne droite indéfinie FK qui ne paſſe par aucun de ces points ; ſoit imaginé le point de concours K des deux côtés AK, BK, ſe mouvoir le long de la droite FK, & ſoit propoſé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorſqu'il eſt néceſſaire de l'autre côté des points A, B. FIG. 206.

Sur AB comme corde, je décris de l'autre côté du point M, un arc de cercle capable d'un angle BDA qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés KAM, KBM ; & ayant achevé le cercle entier dont

cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie FK tombe toute entiere au dehors de ce cercle, ou qu'elle paſſe au dedans, ou enfin qu'elle le touche; ce qui fait trois différens cas que j'explique en particulier.

Premier cas. Du centre C du cercle $BDAE$ je mene ſur FK, la perpendiculaire CF qui le rencontre aux points D, E; & je fais paſſer par le point D (plus proche de la ligne FK que l'autre point E) les deux côtés DA, DB, des deux angles DAP, DBQ, égaux aux angles KAM, KBM, leſquels côtés étant prolongés vers D rencontrent la ligne FK aux points G, H. Or par la conſtruction l'angle BDA plus les deux angles DAP, DBQ, vaut quatre droits; & comme le même angle BDA plus les deux angles DAB, DBA, vaut deux droits; il s'enſuit que les angles BAP, ABQ, valent deux droits, & qu'ainſi les lignes AP, BQ, ſont parallèles entr'elles. Cela poſé.

Soit mené du point K ſur les deux côtés AD, BD, les perpendiculaires KR, KS; & des points A, M, ſur les deux autres côtés BQ, AP, les perpendiculaires AI, MP, qui rencontrent BQ, aux points I, Q. Soient les données $FE=a$, $FD=b$, $BI=c$, $AI=d$, $FG=g$, $FH=h$, $DG=m$, $DH=n$; & les inconnues $FK=\zeta$, $AP=x$, $PM=y$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables, GDF, GKR, on aura ces deux proportions: $GD(m).\ GF(g) :: GK(\zeta-g).\ GR=\frac{g\zeta-gg}{m}$. Et $GD(m).\ DF(b) :: GK(\zeta-g).\ KR=\frac{b\zeta-bg}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables GDF, EDA, donnent auſſi $GD(m).\ DF(b) :: ED(a-b).\ AD=\frac{ab-bb}{m}$, & partant $AD+DG$ ou $AG=\frac{ab-bb+mm}{m}$, & $AG+GR$ ou $AR=\frac{ab-bb+mm+g\zeta-gg}{m}=\frac{ab+g\zeta}{m}$; parce $mm=bb+gg$ à cauſe du triangle rectangle DFG. Mais les triangles rectangles ARK, APM ſont ſemblables,

car retranchant des angles égaux KAM, DAP le même angle KAP, les reſtes KAR, PAM, ſeront égaux; & par conſéquent $AR\left(\frac{ab-fz}{m}\right)$. $RK\left(\frac{bz-bg}{m}\right)::$ $AP(x)$. $PM(y)$, d'où l'on tire $z=\frac{aby+bgx}{bx-gy}$.

Maintenant les triangles rectangles ſemblables HDF, HKS donnent $HS=\frac{hz+hh}{n}$, $KS=\frac{bz+bh}{n}$; & les triangles rectangles ſemblables HFD, EBD, donnent $DH(n)$. $DF(b)::$ $DE(a-b)$. $DB=\frac{ab-bb}{n}$. Et partant $BD+DH$ ou $BH=\frac{ab-bb+nn}{n}$, & $BH-HS$ ou $BS=\frac{ab-bb+nn-hz-hh}{n}=\frac{ab-hz}{n}$, parce que $nn=bb+hh$ à cauſe du triangle rectangle DFH. Or les triangles rectangles BSK, BQM, ſont ſemblables ; car retranchant des angles égaux DBQ, KBM, le même angle DBM, les reſtes KBS, MBQ, ſeront égaux; & par conſéquent $BS\left(\frac{ab-hz}{n}\right)$. $SK\left(\frac{bz+bh}{n}\right)::$ BQ $(x-c)$. $QM(y+d)$. D'où l'on tire $z=\frac{aby-bhx+bch+abd}{bx+hy-bc+hd}$.

Comparant cette derniere valeur de z avec la précédente, multipliant en croix, & faiſant pour abréger $GH(g+b)=f$, on arrive enfin en diviſant par abf à cette équation.

$$yy+dy+\frac{b}{a}xx-\frac{bc}{a}x=o$$
$$-\frac{bc}{f} \qquad -\frac{bd}{f}$$
$$+\frac{cgh}{af} \qquad +\frac{dgh}{af}$$

dont le lieu que l'on pourra conſtruire ſelon l'article 324. (Liv. 7.) ſera une Ellipſe, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ ſera toujours précédé dans ce premier cas du ſigne $+$, en quelque ſituation que ſe puiſſent trouver les points A, B, K.

Second cas. Après avoir nommé les lignes par les FIG. 207.

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raiſonnemens ; on arrivera à cette équation.

$$yy + dy - \frac{b}{a}xx + \frac{bc}{a}x = o$$
$$- \frac{bc}{f} \qquad - \frac{bd}{f}$$
$$- \frac{cgh}{af} \qquad - \frac{dgh}{af}$$

qui ne differe de la précédente que dans quelques ſignes, & dont le lieu que l'on pourra conſtruire ſelon l'article 332. (Liv. 7.) ſera toujours deux Hyperboles oppoſées, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ ſera toujours précédé du ſigne — dans ce ſecond cas.

Comme le plan xy ne ſe rencontre point dans les deux équations précédentes, & que l'angle APM eſt droit ; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipſe dans le premier cas, & des Hyperboles oppoſées dans le ſecond doit être parallèle aux lignes AP, BQ ; & qu'il a avec ſon parametre la même raiſon que EF (a) à FD (b), parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré xx exprime ce rapport.

Lorſque le point K en parcourant la ligne indéfinie KF arrive au point O où cette ligne rencontre la circonférence, il eſt clair que les côtés AM, BM, qui décrivent par leur point de concours M l'Hyperbole BAM deviennent parallèles entr'eux ; qu'ils ſe coupent vers le côté oppoſé, pendant que le point K parcourt la partie OL de la ligne KF renfermée dans la circonférence ; qu'ils deviennent encore parallèles, lorſque le point K tombe en L, après quoi ils ſe rencontrent de nouveau vers le même côté. D'ou l'on voit que le point M décrit l'Hyperbole BAM, pendant que le point K parcourt les deux parties indéfinies de la droite KF qui tombent de part & d'autre de la circonférence ; & qu'il décrit ſon oppoſée, pendant que le point K parcourt la partie OL renfermée dans la circonférence.

FIG. 208. *Troiſieme cas.* Comme dans ce troiſieme cas la droite

indéfinie FK touche la circonférence du cercle $BDAE$ en quelque point F, il eſt clair que le point D des deux autres cas ſe confond ici avec le point F, & qu'ainſi les triangles DFG, DFH, s'évanouiſſent : c'eſt pourquoi on ſe ſervira en leur place des triangles DAE, DBE, de la maniere qui ſuit.

Soient les données $AE=a$, $EB=b$, $EF=m$, $AF=g$, $BF=h$, $BI=c$, $AI=d$; & les inconnues $FK=\zeta$, $AP=x$, $PM=y$. Les triangles rectangles FKR, EFA ſont ſemblables; car l'angle KFR ou ſon oppoſé au ſommet TFA fait par la tangente FT & la corde FA, a pour meſure la moitié de l'arc AF; de même que l'angle FEA: & partant $FE\,(m).\ EA\,(a)::KF\,(\zeta).\ FR=\frac{a\zeta}{m}$. Et $EF\,(m).\ FA\,(g)::FK\,(\zeta).\ KR=\frac{g\zeta}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables ARK, APM, donnent AR ou $AF+FR\left(\frac{a\zeta+gm}{m}\right).\ RK\left(\frac{g\zeta}{m}\right)::AP\,(x).\ PM\,(y)$; d'où l'on tire $\zeta=\frac{gmy}{gx-ay}$. On trouvera de même, à cauſe des triangles rectangles ſemblables EFB, FKS, que $FS=\frac{b\zeta}{m}$, & $KS=\frac{h\zeta}{m}$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables BSK, BQM, que BS ou $BF-FS\left(\frac{hm-b\zeta}{m}\right).\ SK\left(\frac{h\zeta}{m}\right)::BQ\,(x-c).\ QM\,(y+d)$; ce qui donne $\zeta=\frac{hmy+hmd}{hx-ch+bd+by}$.

Comparant ces deux valeurs de ζ, multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy+dy-\frac{cgh}{ah+bg}y-\frac{dgh}{ah+bg}x=o$, dont le lieu ſera toujours une Parabole que l'on peut conſtruire ſelon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura ſon axe parallèle aux droites AP, BQ.

Il eſt donc évident, 1°. Que le lieu de tous les points cherchés M ſera toujours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes ſera parallèle aux lignes AP, BQ;

& en particulier qu'il ſera une Ellipſe dans le premier cas, deux Hyperboles oppoſées dans le ſecond, & une Parabole dans le troiſieme; & que dans le premier & le ſecond cas, l'axe qui eſt parallèle à AP, aura avec ſon parametre, la même raiſon que EF à FD. 2°. Que dans le premier & le troiſieme cas les deux points fixes A, B, autour deſquels tournent les angles mobiles KAM, KBM tomberont toujours du même côté de la ligne FK, au lieu que dans le ſecond ils peuvent tomber non-ſeulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre; parce que la circonférence du cercle $ADBE$ ſur laquelle ils ſont ſitués, eſt coupée alors en deux portions par la ligne FK.

REMARQUE I.

FIG. 206. 207. 208. 372. 1°. UNE ligne quelconque qui paſſe par l'un des points fixes A ou B, comme AM, étant donnée, on pourra toujours trouver ſur cette ligne le point M où elle rencontre la Section qui eſt le lieu requis, en cette ſorte. Ayant mené la droite AK qui faſſe avec AM l'angle MAK égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe A, on menera du point K où elle rencontre la droite FK, par le point fixe B, l'angle KBM égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe B; & le point M où le côté BM de cet angle rencontre la ligne AM, ſera celui qu'on cherche. 2°. Lorſque le point K en parcourant la ligne FK, ſe trouve tellement ſitué que le côté AM de l'angle KAM tombe ſur la ligne AB; il eſt viſible que le point de concours M des deux côtés AM, BM, tombe alors ſur le point B, & qu'ainſi le lieu des points M paſſe par le point fixe B; on prouvera de même qu'il paſſe par le point A.

FIG. 206. De-là on voit que pour décrire la Section conique qui eſt le lieu des points cherchés M, ſans avoir beſoin des équations précédentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites AP, AI; ſur leſquelles ayant

trouvé, ſelon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipſe ou les deux Hyperboles oppoſées (ſelon que FK tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui eſt parallèle à AP ſoit à ſon conjugué, comme le quarré de EF eſt au quarré de DF. Si la Section eſt une Parabole (ce qui arrive lorſque la ligne KF touche le cercle BDA); on trouvera ſur la ligne AI le point où elle rencontre la Section, & on décrira ſelon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui paſſe par ce point, & par les deux autres donnés A, B; & dont les diametres ſoient parallèles aux lignes AP, BQ.

* *Art.* 176 & 178.

FIG. 208.

REMARQUE II.

373. LORSQUE le point K en parcourant la ligne FK, eſt tellement ſitué que le côté AM de l'angle KAM tombe ſur AB, il eſt clair non-ſeulement que le point M tombe en B; mais auſſi que le côté BM de l'angle KBM devient tangente * en B de la ligne courbe qui eſt le lieu du point M, puiſque le point M peut être regardé alors comme étant infiniment près du point B. D'où il ſuit que pour mener une tangente de ce lieu en B, il n'y a qu'à mener par le point A une ligne droite AC qui faſſe avec BA un angle BAC égal à l'angle donné KAM, & tirer enſuite une ligne BD, qui faſſe avec BC l'angle CBD égal à l'autre angle donné KBM; car le côté BM de cet angle, qui devient BD, touchera la Section en B. Il en eſt de même de l'autre point fixe A.

FIG. 209.

* *Art.* 188.

De-là on tire encore une maniere très-facile de décrire la Section conique qui eſt le lieu de tous les points M ſans avoir beſoin des équations précédentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe B une tangente BD, & par l'autre point fixe A une parallèle AE à cette tangente, on trouvera * ſur cette ligne le point E où elle rencontre la Section; & l'ayant diviſée par le milieu en H on tirera BH, ſur laquelle on cherchera *

* *Art.* 372.

* *Art.* 372.

auſſi le point G où elle rencontre la Section. Cela fait, on décrira * du diametre BG & de l'ordonnée HA ou HE, une Section conique qui ſera celle qu'on demande. Car il eſt viſible que la ligne BG qui diviſe par le milieu en H la ligne AE terminée par la Section, & parallèle à la tangente en B, en ſera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne AH. Où l'on doit remarquer que lorſque le point H tombe entre les points B, G, la Section eſt une Ellipſe; que lorſqu'il tombe de part où d'autre de ces deux points, ce ſont deux Hyperboles oppoſées; & qu'enfin lorſque la ligne BG eſt infinie, la Section eſt une Parabole.

* *Art.* 162. 161.

COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. CET exemple nous fournit le moyen de faire paſſer par quatre points donnés A, B, H, M, une Section conique d'une eſpece déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipſe, dont le grand axe ſoit à ſon parametre, en la raiſon donnée de a à b. Je forme le triangle ABH, en joignant trois des points donnés par des lignes droites; & du quatrieme point M, je fais paſſer par les points A, B, les angles MAK, MBK, égaux aux angles GAH, RBA, compléments à deux droits des angles HAB, HBA. Je décris ſur AB comme corde de l'autre côté du point M un arc de cercle BDA capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles KAM, KBM; & du centre C de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon CF ſoit au rayon CD du premier, comme $a+b$ eſt à $a-b$; & du point de concours K des deux côtés AK, BK, des angles MAK, MBK, je tire une tangente KF à ce dernier cercle. Maintenant je dis que ſi l'on fait mouvoir le point K le long de la droite indéfinie FK; le point de concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorſqu'il ſera néceſſaire de l'autre côté des points A, B, décrira dans ce mouvement l'Ellipſe qu'on demande. Car il eſt évident ſelon ce

ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points M ſera une Ellipſe, dont le grand axe ſera à ſon parametre comme EF (a) à DF (b); & de plus qu'elle paſſera par les points A, M, B, H, puiſque le point K étant en G, le côté AM tombera ſur AH, & le côté BM ſur BR.

2°. Lorſque c'eſt une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées qu'il eſt queſtion de décrire par quatre points donnés A, B, H; M, & dont le grand axe ſoit à ſon parametre en la raiſon donnée de a à b; la conſtruction demeure la même, excepté que le rayon CF du cercle concentrique au cercle $BDAE$, doit être au rayon CD, comme $a-b$ eſt à $a+b$.

3°. Lorſqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés A, B, H, M. Ayant décrit comme dans le premier cas le cercle $BDAE$, on menera du point de concours K une tangente à ce cercle, qui ſera la droite indéfinie ſur laquelle faiſant mouvoir le point K, l'autre point de concours M décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'enſuit qu'on peut décrire deux différentes Sections coniques qui ſatisfont également lorſque le Problême eſt poſſible; car lorſque le point K tombe au dedans du cercle qui a pour rayon CF, il eſt viſible que le Problême eſt impoſſible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ſes axes en ſe ſervant de l'article 372. ou par le moyen d'un de ſes diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en ſe ſervant de l'article 373.

COROLLAIRE II.

375. ON tire encore de cet exemple, une nouvelle maniere de décrire une Section conique qui paſſe par cinq points donnés A, B, H, M, N. Car ayant joint trois quelconques de ces points A, B, H, par des FIG. 211.

lignes droites, on fera paſſer par les autres points M, N, & par les deux points fixes A, B, les angles MAK, NAS, égaux chacun à l'angle HAG complément à deux droits de l'angle HAB, & les angles MBK, NBS égaux chacun à l'angle ABR complément à deux droits de l'angle ABH; & on tirera par les points de concours K, S, une ligne droite indéfinie S, K, ſur laquelle faiſant mouvoir le point K, il eſt clair que le point de concours M décrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande; puiſqu'elle paſſera par les cinq points donnés A, B, H, M, N.

LIVRE NEUVIEME.

De la conſtruction des Egalités.

PROPOSITION I.

Problême.

376. COMSTRUIRE *toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnue ne ſe trouve qu'au premier degré.*

Soit en premier lieu l'inconnue x égale à une ou à pluſieurs fractions ſimples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Ayant fait $c.b::a.l$, il eſt clair que cette quatrieme proportionnelle $l=\frac{ab}{c}$; & ſi l'on fait $f.l::e.m$, l'on aura $m=\frac{el}{f}=\frac{abe}{cf}$; & faiſant enfin $g.m::h.n$, il vient $n=\frac{mh}{g}=\frac{abeh}{cfg}$ en mettant pour m ſa valeur $\frac{abe}{cf}$. De ſorte qu'on aura l'inconnue x égale à l, ou à m, ou à n, &c. ſelon que x ſera égale à $\frac{ab}{c}$, ou à $\frac{abe}{cf}$, ou à $\frac{abeh}{cfg}$, &c. Or il eſt viſible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il ſera néceſſaire, on trouvera toujours une ligne droite égale à une fraction ſimple donnée, tel que puiſſe être le nombre des dimenſions de ſon numérateur. D'où l'on voit que l'on pourra toujours trouver une ligne x égale à une quantité compoſée de pluſieurs fractions ſimples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajouter, ou retrancher ſelon qu'il ſera marqué par les ſignes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x=a+\frac{ab}{c}+\frac{aab}{cf}-\frac{aacc}{b^3}$, on ajoutera les deux lignes $h=\frac{ab}{c}$ & $l=\frac{aab}{cf}$ à la ligne a pour en compoſer une ſeule, de laquelle ayant retranché

compoſées ; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajouter enſuite ou les retrancher les unes des autres, ſelon que les ſignes + ou — le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. IL eſt facile par le moyen de cette Propoſition de trouver, 1°. Une fraction ſimple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur ou le numérateur a ſoit donné, égale à une ou à pluſieurs fractions ſimples ou compoſées ; car il n'y aura qu'à trouver une ligne x égale à la ligne a multipliée ou diviſée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction $\frac{x}{a} = \frac{cc+ff}{af+cf} + \frac{aa}{gg}$, il eſt viſible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{acc+aff}{af+cf} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan ax, dont l'un des côtés a eſt donné, égal à un ou à pluſieurs ſi compoſés qu'ils puiſſent être ; car il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces plans diviſés par a. 3°. Un ſolide aax ou abx, dont deux des côtés a, a, ou a, b, ſont donnés, égal à pluſieurs ſolides ; puiſqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces ſolides diviſés par le quarré aa ou par le plan ab. 4°. Un ſurſolide a^3x ou $abcx$ dont trois côtés a, a, a, ou a, b, c, ſont donnés, égal à pluſieurs ſurſolides ; puiſqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces ſurſolides diviſés par le cube a^3 ou par le ſolide abc. Et il en eſt de même de pluſieurs produits de cinq dimenſions, de ſix, &c. que l'on peut toujours réduire en un ſeul dont tous les côtés, excepté un, ſoient donnés.

COROLLAIRE II.

378. DE-LA on voit que pour trouver un un quarré égal à pluſieurs plans donnés, il les faut réunir

tous en un ſeul, & trouver enſuite une moyenne proportionnelle entre ſes deux côtés ; car il eſt clair qu'elle ſera le côté du quarré qu'on demande. Qu'il faille, par exemple, trouver un quarré $xx = ss - \frac{ccee - eehh}{bb + af}$ (les lignes $a, b, c, e, f, h, s,$ ſont données), je cherche une ligne $m = \frac{ss}{e} - \frac{cce - ehh}{bb + af}$ pour avoir un plan $em = ss - \frac{ccee - eehh}{bb + af}$, & ayant trouvé une moyenne proportionnelle x entre les deux côtés e, m, du plan em, il eſt clair que $xx = em = ss - \frac{ccee - eehh}{bb + af}$.

Pour trouver une ligne x dont le quarré x^4 ſoit égal à pluſieurs ſurſolides donnés ; je cherche, comme ci-deſſus, un quarré zz égal à tous les ſurſolides donnés diviſés par le quarré aa donné ou pris à volonté. Je prends enſuite une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes a & z, & je dis qu'elle ſera celle qu'on demande ; car $xx = az$, &, en quarrant chaque membre, $x^4 = aazz$, c'eſt-à-dire x^4 égal à tous les ſurſolides donnés.

REMARQUE.

379. QUOIQUE la méthode que l'on vient d'expliquer ſoit générale pour tous les cas poſſibles, il ne s'enſuit pas néanmoins qu'elle ſoit toujours la plus ſimple. C'eſt pourquoi je vais donner ici des exemples particuliers que l'on réſoud d'une maniere plus aiſée en s'écartant un peu de la méthode générale, & qui pourront ſervir de méthodes pour tous les cas ſemblables.

1°. Soit $x = \frac{abc - aabb}{abc + c^3}$. Je cherche d'abord une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & ſubſtituant à la place de ab ſa valeur cm ; je trouve $x = \frac{c^3 m - ccmm}{ccm + c^3} = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où je connois qu'en faiſant $c + m. c - m :: m. n$, cette quatrieme proportionnelle $n = x$. Il eſt donc viſible qu'on n'a eu beſoin que de deux proportions pour trouver la valeur de x, au lieu

que ſi l'on tente la méthode générale, on trouvera qu'il en faut au moins trois.

2°. Soit $x = \sqrt{aa+bb}$. Je fais un triangle rectangle; dont l'un des côtés $= a$, & l'autre $= b$; & ſon hypothénuſe ſera la valeur de x. S'il falloit trouver une ligne $x = \sqrt{aa-bb}$, il n'y auroit qu'à trouver une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes $a+b$ & $a-b$; car ſon quarré xx doit être égal au produit des extrêmes $aa-bb$. Ou bien je fais un triangle rectangle dont l'hypothénuſe $= a$, & l'un des côtés $= b$; l'autre côté ſera la valeur de x.

3°. Soit $xx = ss+4ee-\frac{4cccc}{aa}$. Je prends l'hypothénuſe m d'un triangle rectangle dont l'un des côtés $= s$, & l'autre $= 2e$, & ayant trouvé une autre ligne $n = \frac{2ce}{a}$, j'ai $xx = mm-nn$ & $x = \sqrt{mm-nn}$ que je réſous comme je viens de faire $x = \sqrt{aa-bb}$ dans l'exemple précédent.

4°. Soit enfin $xx = ss-\frac{ecee-eehh}{bb+af}$. Je prends une moyenne proportionnelle entre les côtés a, f, du plan af, pour avoir un quarré $ll = af$, je trouve enſuite un quarré $mm = bb+ll$, & un autre quarré $nn = cc+hh$ par le moyen de deux triangles rectangles, comme dans le ſecond exemple, & j'ai par la ſubſtitution $xx = ss-\frac{eenn}{mm}$; & trouvant enfin une ligne $g = \frac{en}{m}$, il vient $x = \sqrt{ss-\frac{gg}{bg}}$ que l'on réſoud comme ci-deſſus.

PROPOSITION II.

Problême.

380. TROUVER *les racines de toutes ſortes d'Egalités du ſecond degré.*

Toutes les Egalités du ſecond degré ſe peuvent ré-

cas $xx - ax + bb = o$. Si l'on veut que BE ou $AF = -x$, & BD ou $AG = -x$, on trouvera $AF \times FH$ & $AG \times GH = -xx - ax = \overline{FE}^2$ ou $\overline{GD}^2$ (bb) c'eſt-à-dire $xx + ax + bb = o$.

Si le cercle qui a pour centre le point C, & pour rayon la droite CA, ne coupe ni ne touche la parallèle BD, (ce qui arrive toujours lorſque AB ſurpaſſe CA) ; les racines de l'égalité ſeront toutes deux imaginaires : mais s'il la touche en un point, les deux racines BE, BD, deviennent égales chacune au rayon CA.

REMARQUE.

381. LORSQUE dans une égalité l'inconnue ne ſe rencontre qu'au quatrieme & au ſecond degré, on peut toujours réduire cette égalité en une autre où l'inconnue ne monte qu'au ſecond degré : de maniere que ces ſortes d'égalités ne paſſent que pour être du ſecond degré.

Soit par exemple $z^4 - aazz = aabb = o$. Je ſuppoſe une inconnue x qui ſoit telle que ſon rectangle par la donnée a ſoit égal au quarré zz ; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de zz cette valeur ax, & à la place de z^4 ſon quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aazz - aabb = o$ en cette autre $xx - ax - bb = o$, où l'inconnue x ne monte qu'au ſecond degré. J'en cherche les racines x, comme l'on vient d'enſeigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée a & les valeurs de ſes racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnue z : ce qui eſt évident, puiſque $zz = ax$. FIG. 214.

PROPOSITION III.

Problême.

382. TROUVER *par une autre voie les racines des égalités du ſecond degré, ſans qu'il ſoit néceſſaire de changer leur dernier terme en un quarré.*

FIG. 215. 1°. Soit $xx \mp ax - bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b - c$ (je ſuppoſe ici que b ſurpaſſe c); on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b - c$: & ayant prolongé AD en F enſorte que $DF = c$, on décrira de ſon centre C, & du rayon CF, un autre cercle concentrique qui coupe aux points F, E, G, H, les cordes AD, AB prolongées. Je dis que AG eſt la vraie racine, & AH la fauſſe de l'égalité $xx + ax - bc = o$; & qu'au contraire AG eſt la fauſſe, & AH eſt la vraie racine de $xx - ax - bc = o$.

Car AF ou $AD + DF = b$, DF ou $AE = c$, & faiſant AG ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la propriété du cercle $EGFH$, le rectangle $EA \times AF$ $(bc) = GA \times AH$ $(xx + ax)$. Si l'on fait à préſent $AH = -x$, on aura AG ou BH ou $AH - AB = -x - a$, & par conſéquent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc ſoit que l'on faſſe $AG = x$ ou $AH = -x$, on trouvera toujours $xx + ax - bc = o$. On prouvera de même que AG eſt la racine fauſſe, & AH la vraie de l'égalité $xx - ax - bc = o$.

FIG. 216. 2°. Soit $xx \mp ax + bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b + c$, on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b + c$: & ayant pris ſur AD la partie $DF = c$, on décrira de ſon centre C & du rayon CF un autre cercle concentrique qui coupera les cordes AD, AB, aux points F, E, G, H. Je dis que AG & AH ſont les deux racines vraies de l'égalité $xx - ax + bc = o$, & les deux fauſſes de $xx + ax + bc = o$. Cela ſe démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon CF ne touchoit ni ne rencontroit la ligne AB en aucun point, il s'enſuivroit que les deux racines de l'égalité ſeroient imaginaires.

AVERTISSEMENT.

Tout l'artifice dont je me ſers pour conſtruire les égalités qui n'ont qu'une inconnue, ou pour en trouver les racines, conſiſte à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnue; enſorte qu'on en puiſſe tirer pluſieurs équations qui renferment chacune les deux inconnues & qui ſoient telles que deux quelconques de ces équations renferment enſemble toutes les quantités connues de la propoſée; car autrement en faiſant évanouir l'inconnue nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité propoſée. Je choiſis enſuite entre ces équations deux des plus ſimples, & en ayant conſtruit ſéparément les lieux, leurs points d'interſections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnue; car il faut que les lieux que l'on tire de la propoſée, ſoient les plus ſimples qu'il ſe puiſſe: par exemple, ſi l'égalité eſt du quatrieme degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne paſſe point le ſecond degré; que parmi ces lieux il y ait toujours un cercle comme étant le plus ſimple, & auſſi une Parabole, une Hyperbole équilatere, &c. Or c'eſt ce que j'ai tâché d'exécuter dans les Lemmes & les Propoſitions qui ſuivent.

LEMME FONDAMENTAL

Pour la conſtruction des Egalités du troiſieme & du quatrieme degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.

383. SOIT propoſée l'égalité $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$, dans laquelle x eſt l'inconnue, & a, b, c, d, f, ſont les données; & ſoit ſuppoſée une autre inconnue y telle que ſon rectangle par la connue a, ſoit égal au rectangle de $x + b$ par x. Ce qui donne les équations ſuivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$; &

mettant à la place de $x^4 + 2bx^3$, ſa valeur $aayy - bbxx$ dans l'égalité propoſée x^4, &c. on la changera en cette ſeconde équation.

2°. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = o$, dans laquelle mettant à la place de xx ſa valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la premiere équation, 1°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2°. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrive à ces trois différentes équations.

3°. $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3x}{aa} + \frac{c}{a}xx - dx - af = o$.

4°. $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = o$.

5°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$. Si l'on retranche de cette cinquieme équation, la premiere $xx + bx - ay = o$, & qu'enſuite on la lui ajoute, on aura ces deux autres.

6°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$.

7°. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$.

Maintenant ſi l'on prend pour les inconnues x & y deux lignes droites AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle quelconque APM; il eſt évident que le lieu de la premiere équation eſt * une Parabole : que celui de la ſeconde peut être une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole, ſelon que bb eſt égal, moindre, ou plus grand que ac; que celui de la troiſieme eſt une Ellipſe, qui devient un cercle * lorſque $c = a$ & que l'angle APM eſt droit : que celui de la quatrieme eſt une Hyperbole, qui devient équilatere * lorſque $b = a$: que celui de la cinquieme eſt encore une Parabole : que celui de la ſixieme eſt une Hyperbole équilatere : & enfin que le lieu de la ſeptieme eſt un cercle, lorſque l'angle APM eſt droit.

* *Art.* 310.

* *Art.* 328 & 329.

* *Art.* 335 & 336.

REMARQUE I.

384. S'IL y avoit $-2bx^3$ dans l'égalité proposée au lieu de $+2bx^3$, il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes où b se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'égalité proposée par rapport aux lettres c, d, f, qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les différens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation sera une Parabole, celui de la sixieme une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la derniere toujours un cercle lorsque l'angle APM est droit.

REMARQUE II.

385. ON a choisi pour premiere équation $xx+bx=ay$, plutôt que $xx-bx=ay$ ou simplement $xx=ay$; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée x^4+2bx^3, &c. & qu'ainsi on peut les faire évanouir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle équation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en différentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vien de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan xy; & entre lesquels le lieu de la derniere équation, est toujours un cercle, en supposant que les inconnues x & y fassent entr'elles un angle droit.

PROPOSITION IV.

Problême.

386. TROUVER *les racines de l'égalité propoſée* $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$, *par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.*

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnues & indéterminées x & y, les deux lignes droites AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle droit APM; je conſtruis * d'abord la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation du Lemme, & enſuite le cercle qui eſt le lieu de la ſeptieme : & leurs interſections me ſervent à découvrir les différentes valeurs de l'inconnue x qui ſeront les racines de l'égalité propoſée. Cela ſe fait en cette ſorte.

* *Art.* 310.

Ayant pris ſur la ligne AP prolongée de l'autre côté de A la partie $AD = \frac{1}{2}b$, on menera par le point D une parallèle à PM, ſur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté oppoſé à PM; on décrira de l'axe CD qui ait ſon origine en C, & dont le parametre ſoit égal à la donnée a, une Parabole MCM. Cela fait on menera par le point fixe A une parallèle AQ à PM, ſur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = \overline{+}g$ pour abréger, on tirera parallèlement à AP la droite $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bg}{a}$ ſçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = +g$ c'eſt-à-dire lorſque la valeur de AB eſt poſitive, & $+\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = -g$; en obſervant de prendre ou mener ces deux lignes AB, BE, du côté de PM lorſque leurs valeurs ſont poſitives, & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont négatives. Nommant enfin EA, m; on décrira du centre E, & du rayon $EM = \sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points M où il coupe la Parabole des perpendiculaires MP ſur la ligne AP : les par-

ties AP de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, ſçavoir les vraies lorſque les points P tombent du côté où l'on a ſuppoſé PM en faiſant la conſtruction, & les fauſſes lorſqu'ils tombent du côté oppoſé.

Car prolongeant MQ parallèle à AP, & qui rencontre l'axe CG au point L, on aura ML ou $AP+AD=x+\frac{1}{2}b$, CL ou $MP+DC=y+\frac{bb}{4a}$; & par la propriété de la Parabole $\overline{ML}=CL\times a$, c'eſt-à-dire $xx+bx+\frac{1}{4}bb=\frac{1}{4}bb+ay$, ou $xx+bx=ay$ qui eſt la premiere équation du Lemme. Maintenant ſi l'on prolonge EB juſqu'à ce qu'elle rencontre PM en R, & qu'on tire le rayon EM, on aura à cauſe du triangle rectangle ERM le quarré $\overline{EM}=\overline{ER}+\overline{RM}=\overline{EB}+2EB\times BR+\overline{BR}+\overline{PM}-2AB\times PM+\overline{AB}=\overline{EB}+\overline{BA}+af$ par la conſtruction; c'eſt-à-dire en effaçant de part & d'autre les quarrés $\overline{EB}$, $\overline{BA}$, en mettant pour $2AB$ ſa valeur $a+\frac{bb}{a}-c$, & pour $2BE$ ſa valeur $\frac{2bg}{a}-d$ ou $b+\frac{b^3}{aa}-\frac{bc}{a}-d$, & pour BR ou AP & PM leurs valeurs x & y, la ſeptieme équation $yy+cy-ay-\frac{bb}{a}y+xx+bx+\frac{b^3}{aa}x-\frac{bc}{a}x-dx=af$, dans laquelle ſi l'on met à la place de y ſa valeur $\frac{xx+bx}{a}$ trouvée par la premiere équation, & à la place de yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'équation même propoſée $x^4+2bx^3+acxx-aadx-a^3f=o$. D'où l'on voit que la ligne AP exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on obſerve de prendre $-x$ pour AP & $-y$ pour PM, lorſque ces lignes tombent du côté oppoſé où on les a ſuppoſées en faiſant la conſtruction; on trouvera toujours par la propriété de la Parabole la premiere équation, & par la propriété du cercle la ſeptieme. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

387 IL eſt viſible qu'on rendra la conſtruction précédente générale pour toutes les égalités du troiſieme & du quatrieme degré, & qu'on y employera toujours une Parabole qui ait pour le parametre de ſon axe une ligne donnée a; ſi l'on obſerve, 1°. De multiplier par ſa racine x l'égalité lorſqu'elle n'eſt que du troiſieme degré; & de prendre une ligne * $2b$ égale à toutes celles qui multiplient x^3, un plan * ac égal à ceux qui multiplient xx, un ſolide aad égal aux ſolides qui multiplient x, & enfin un ſurſolide a^3f égal aux termes entiérement connus de l'égalité donnée. 2°. De changer dans les valeurs des lignes AD, DC, AB, BE, EM, qui déterminent la conſtruction de la Parabole & du cercle, les ſignes des termes où b ſe rencontre avec une dimenſion impaire s'il y a $-2bx^3$ dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit $+2bx^3$ dans celle du Problême; & d'effacer tous les termes où b ſe trouve ſi le terme $2bx^3$ manque, parce qu'alors $b=o$: comme auſſi de faire la même choſe à l'égard des termes où c, d, f, ſe rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorſqu'elles ſont poſitives, & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont négatives. On aura donc $AD=\pm\frac{1}{2}b$, ſçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $-2bx^3$; $AB=\frac{1}{2}a+\frac{bb}{2a}\pm\frac{1}{2}c=\mp g$, ſçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorſque c'eſt $-acxx$; $BE=\pm\frac{bg}{a}\mp\frac{1}{2}d$, ſçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorſque $AB=+g$, & qu'il y a $+2bx^3$, ou bien lorſque $AB=-g$, & qu'il y a $-2bx^3$; & au contraire $+\frac{bg}{a}$ lorſque $AB=+g$ & qu'il y a $-2bx^3$, ou bien lorſque $AB=-g$ & qu'il y a $+2bx^3$ (c'eſt-à-dire $-\frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs de AB & AD ſont l'une poſitive & l'autre négative, & $+\frac{bg}{a}$ lorſque ces valeurs ſont toutes deux ou poſitives

* *Art.* 376.
* *Art.* 377.

ves ou négatives) ; comme auſſi $+\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $-aadx$, & $-\frac{1}{2}d$ lorſque c'eſt $+aadx$: & enfin $EM = \sqrt{mm \mp af}$, ſçavoir $+af$ lorſqu'il y a $-a^3f$, & $-af$ lorſque c'eſt $+a^3f$. D'où l'on tire cette conſtruction géométrique qui eſt générale pour tous les cas.

Une Parabole MCM qui a pour axe la ligne CG, dont le parametre eſt égal à la ligne a, étant donnée, & ayant réduit l'égalité propoſée ſous cette forme $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = o$; on menera une ligne AB parallèle à l'axe CG qui en ſoit diſtante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorſqu'il y a $+2bx^3$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorſqu'il y a $-2bx^3$. On tirera par le point A où la ligne AB rencontre la Parabole, une perpendiculaire AD ſur l'axe CG ; & on prendra ſur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toujours du côté oppoſé à ſon origine C, & la partie $GK = \frac{1}{2}C$ vers ſon origine C lorſqu'il y a $+acxx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-acxx$. On menera enſuite par les points déterminés A, F, une ligne droite indéfinie AF, & par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre AF en H ; & on prendra ſur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorſqu'il y a $-aadx$, & du côté gauche lorſqu'il y a $+aadx$. Cela fait, on décrira un cercle du centre E, & du rayon $EM = AE$, lorſque le terme a^3f manque dans l'égalité donnée, c'eſt-à-dire, lorſqu'elle n'eſt que du troiſieme degré : mais lorſqu'elle eſt du quatrieme, on prendra (après avoir nommé AE, m ;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, ſçavoir $+af$ s'il y a $-a^3f$, & $-af$ s'il y a $+a^3f$. Enfin des points M où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires MQ ſur la ligne AB ; elles ſeront les racines de l'égalité donnée ; ſçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies ; & celles qui tombent du côté gauche, les fauſſes. FIG. 217.

Car prolongeant HK juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AB au point B, on a par la conſtruction BK ou

$AD = \pm\frac{1}{2}b$, ſçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorſque c'eſt $-2bx^3$; & par la propriété de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc DG ou $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a}$, & DK ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, ſçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $-acxx$; & l'on doit obſerver que le point B tombe du côté de PM lorſque $AB = +g$, c'eſt-à-dire lorſque ſa valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt négative. Or à cauſe des triangles ſemblables ADF, ABH, on aura $DF(\frac{1}{2}a).DA(\pm\frac{1}{2}b) :: AB(\mp g)$. $BH = \pm\frac{bg}{a}$, ſçavoir $+\frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs de AD & de AB ſont toutes deux poſitives ou négatives, & $-\frac{bg}{a}$ lorſque l'une d'elles eſt poſitive & l'autre négative. Et partant $BE = \pm\frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$, ſçavoir $-\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $-aadx$, & $+\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $+aadx$; & l'on doit encore obſerver que le point E tombera du côté de PM lorſque la valeur de BE eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt négative. D'où il eſt évident que par le moyen de cette conſtruction on déterminera dans tous les cas poſſibles toujours comme il eſt requis, le centre E du cercle.

Si le ſecond terme $2bx^3$ manquoit dans l'égalité donnée, il eſt clair que les lignes AB, AF, tomberoient ſur l'axe CG, enſorte que les points A, D, ſe confondroient avec l'origine C ; puiſque $b = o$. Et par conſéquent le point G tomberoit ſur le point F, & les points H, B, ſur le point K : ce qui rend la conſtruction générale beaucoup plus ſimple. Car il ne faudroit alors que prendre ſur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toujours vers le dedans de la Parabole, & la partie $FK\frac{1}{2}c$ vers l'origine C lorſqu'il y a $+acxx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorſqu'il y a $+aadx$, & du côté droit lorſqu'il y a $-aadx$; & achever le reſte comme dans la conſtruction générale, en obſervant qu'ici $EC = m$.

FIG. 218.

De même ſi le terme $acxx$ manque, le point K tombera ſur le point G; & ſi c'eſt le terme $aadx$, le centre E du cercle tombera en H. FIG. 217.

COROLLAIRE II.

388. ON peut encore trouver une conſtruction plus ſimple pour les égalités du troiſieme degré qui ont un ſecond terme, en les multipliant par l'inconnue plus ou moins la quantité connue du ſecond terme, ſçavoir plus cette quantité quand le ſecond terme eſt affecté du ſigne —; & moins cette quantité lorſqu'il y a le ſigne +; ce qui donne une équation du quatrieme degré où le ſecond terme eſt évanoui. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troiſieme degré, $x^3 - bxx + apx + aaq = o$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatrieme degré, $x^4 + apxx + aaqx + aabq = o$, $- bbxx + abpx$ dans laquelle le ſecond terme eſt évanoui; je me ſers à préſent de la conſtruction que l'on vient de donner pour ces ſortes d'égalités où le ſecond terme manque, & j'ai $CK(\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, $KE(\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, & le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette conſtruction.

Ayant mené une parallèle à l'axe CD qui en ſoit diſtante vers le côté gauche d'une ligne égale à b, & qui rencontre la Parabole au point A, je tire par l'origine C de l'axe la droite CA, ſur laquelle j'éleve par ſon point de milieu O une perpendiculaire indéfinie OG qui rencontre l'axe au point G. Je prends ſur l'axe vers ſon origine C la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne OG au point H, je prends ſur cette perpendiculaire prolongée du côté de H la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre E & du rayon EA un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points M, d'où ayant abaiſſé ſur l'axe des perpendiculaires MQ; celles qui ſeront FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines; & celles qui ſeront à gauche, les fauſſes de l'égalité propoſée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$.

Car ayant mené les perpendiculaires AD, OL, ſur l'axe; on aura par la conſtruction $AD = b$, & par la propriété de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puiſque CA eſt diviſée par le milieu en O, les triangles ſemblables CAD, COL, donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables CLO, OLG, on aura $CL\left(\frac{bb}{2a}\right).\ LO\left(\frac{1}{2}b\right) :: LO\left(\frac{1}{2}b\right).\ LG = \frac{1}{4}a$, & par conſéquent CK ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cauſe des triangles ſemblables GLO, GKH, on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il eſt preſcrit dans la conſtruction lorſqu'il y a $+aadx$. Le point E eſt donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ſes interſections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatrieme degré $x^4 + apxx$, &c. Or comme les racines de cette égalité ſont celles de la propoſée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$, avec une fauſſe AD (b); il s'enſuit que ce cercle doit paſſer par le point A. Donc, &c.

On peut encore s'aſſurer par le calcul que EA eſt le rayon du cercle cherché. Car menant EB parallèle à l'axe, on aura (à cauſe des triangles rectangles EBA, EKC) les quarrés des hypothénuſes $\overline{EA}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2$ & $\overline{EC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KE}^2$ & par conſéquent il s'agit de prouver que $\overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 - bq$, puiſqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'eſt ce qui doit arriver, ſi le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette conſtruction générale, il faut

obſerver, 1°. De mener du côté gauche de l'axe la parallèle qui en eſt diſtante d'une ligne égale à b, lorſqu'il y a $-bxx$ dans l'égalité propoſée, & du côté droit lorſqu'il y a $+bxx$. 2°. De prendre ſur l'axe $GK=\frac{1}{2}p$ du côté de ſon origine C lorſqu'il y a $+apx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-apx$. 3°. De prendre $HE=\frac{1}{2}q$ du côté gauche lorſqu'il y a $+aaq$, & du côté droit lorſqu'il y a $-aaq$. Tout cela eſt trop évident pour m'arrêter à le démontrer en détail.

REMARQUE I.

389. IL eſt à propos de remarquer, 1°. Que ſi le cercle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'enſuivra que l'égalité propoſée n'aura que deux racines réelles lorſqu'elle eſt du quatrieme degré, & qu'une ſeule lorſqu'elle eſt du troiſieme, & les deux autres imaginaires: comme dans la figure 219. où le cercle ne coupe la Parabole qu'en deux points A, M; l'égalité $x^4+apxx-bbxx$, &c. n'a que deux racines réelles AD, MQ, qui ſont toutes deux fauſſes, parce qu'elles tombent du côté gauche de l'axe. 2°. Que ſi le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorſque l'égalité eſt du troiſieme degré comme l'on voit par les conſtructions précédentes) les quatre racines ſeroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité propoſée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut conſidérer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il la coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui ſont regardés comme réunis dans le point touchant: mais alors l'égalité propoſée ſe pourroit abaiſſer à une du ſecond degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de ſorte qu'on n'auroit point beſoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. SI l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le ſecond terme manque, & qui a toutes ſes racines réelles, la ſomme des vraies eſt égale à la ſomme des fauſſes; on verra naître ce Théorême.

FIG. 218. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points M d'où l'on abaiſſe des perpendiculaires MQ ſur l'axe CF: je dis que la ſomme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, ſera égale à la ſomme de celles qui tombent du côté gauche.

Car ſi l'on prend vers le dedans de la Parabole ſur l'axe depuis ſon origine C la partie CF égale la moitié de ſon parametre que j'appelle a, & qu'ayant tiré du centre E du cercle la perpendiculaire EK ſur l'axe, on faſſe $FK=\frac{1}{2}c$, $KE=\frac{1}{2}d$, $\overline{EC}-\overline{EM}=af$; il eſt clair par la conſtruction qui eſt à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires MQ ſeront les racines de cette égalité $x^4-acxx+aadx+a^3f=o$ dans laquelle le ſecond terme manque; ſçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fauſſes. Donc, &c.

* *Art.* 387.

Si le cercle paſſoit par l'origine C de l'axe, il eſt viſible que l'une des perpendiculaires MQ deviendroit nulle ou zéro; & qu'ainſi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puiſque (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, leſquels ſe réuniſſent au point touchant.

* *Art.* 389.

REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Géométrie des produits qui ayent plus de trois dimenſions; puiſque le ſolide, qui eſt la quantité la plus compoſée, n'en a que trois; on pourra diviſer, ſi l'on veut, tous les termes d'une égalité propoſée qui paſſe par le troiſieme degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puiſſance moindre d'une unité que chacun de ſes termes n'a de dimenſions : ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ſes termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatrieme degré $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$; je la diviſe par a^3, ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$, dont chaque terme n'a qu'une dimenſion, & n'exprime par conſéquent que des lignes droites. On choiſit ordinairement la ligne qui ſe trouve répétée le plus ſouvent dans tous les termes de l'équation propoſée, comme eſt ici la ligne a, & même quelquefois on la ſouſentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle diviſe : ainſi en faiſant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = o$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{aa} - f = o$. Il en eſt de même des égalités du cinquieme & du ſixieme degré, &c.

REMARQUE IV.

392. SI après avoir conſtruit le cercle qui eſt le lieu de la derniere équation du Lemme, on conſtruit une Section conique qui ſoit le lieu de telle autre de ſes équations qu'on voudra; ces deux lieux détermineront par leurs interſections les racines de l'égalité propoſée; dont la raiſon eſt que faiſant évanouir par le moyen de leurs équations l'inconnue y, on retrouve l'égalité même propoſée.

De-là il eſt évident qu'on peut conſtruire cette égalité, 1°. par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en ſe ſervant de la ſeptieme & de la ſixieme équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe dont l'axe parallèle à AP eſt à ſon parametre comme a eſt à c, en ſe ſervant de la ſeptieme & de la troiſieme équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallèle à AP eſt à ſon parametre comme aa eſt à bb, en ſe ſervant de la ſeptieme & de la quatrieme équation. Or comme la ligne a, dont on ſe ſert pour réduire ſous l'expreſſion ac toutes les quantités qui multiplient xx, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x, & enfin ſous l'expreſſion a^3f les quantités entiérement connues, eſt arbitraire; il s'enſuit qu'en prenant pour cette ligne a une infinité de différentes grandeurs, on pourra conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipſes, ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes différentes entr'elles.

On a vu dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire a le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en ſe ſervant de la premiere & de la ſeptieme équation conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée: & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne a d'une certaine maniere, on peut conſtruire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole ſemblable à une Ellipſe ou à une Hyperbole donnée. Car la raiſon de ſes axes étant donnée par la ſuppoſition, la raiſon de l'axe parallèle à AP avec ſon parametre ſera auſſi donnée. Si donc l'on nomme cette raiſon donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorſqu'il s'agit de l'Ellipſe $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$; & partant $aa = \frac{acm}{n}$; d'où il ſuit que ſi l'on prend pour l'unité arbitraire a, la racine d'un quarré aa égal * à une quantité connue ac qui multiplie xx dans l'égalité donnée

* *Art.* 378.

donnée, & eſt multipliée par $\frac{m}{n}$, on conſtruira l'égalité en ſe ſervant de la ſeptieme & de la troiſieme équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe dont l'axe parallèle à AP, ſera à ſon parametre comme m eſt à n, puiſque $\frac{n}{m}=\frac{c}{a}$. Mais lorſqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura $\frac{n}{m}=\frac{bb}{aa}$, & partant $a=b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que ſi l'on prend pour l'unité a cette valeur, & qu'on conſtruiſe l'égalité en ſe ſervant de la ſeptieme & de la quatrieme équation, l'axe parallèle à AP de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la quatrieme, ſera à ſon parametre comme m eſt à n, puiſque $\frac{n}{m}=\frac{bb}{aa}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

REMARQUE V.

393. LA ligne a qui fait l'office de l'unité, & qui eſt arbitraire, ſuffit comme l'on vient de voir pour conſtruire l'égalité propoſée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole ſemblable à une donnée. Mais lorſqu'il eſt queſtion de la conſtruire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole donnée, une ſeule ligne arbitraire ne ſuffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité propoſée, afin de pouvoir les déterminer enſuite de maniere que la Section donnée ſerve. C'eſt ce que l'on va exécuter dans le Lemme ſuivant.

LEMME FONDAMENTAL

Pour la conſtruction des Egalités du troiſieme & du quatrieme degré, avec un cercle & une Ellipſe, ou une Hyperbole donnée.

394. SOIT l'égalité du quatrieme degré $\zeta^4+ab\zeta\zeta-aac\zeta+a^3d=0$, dans laquelle les lettres $a, b, c, d,$

marquent des lignes données, & la lettre z exprime les racines inconnues de l'égalité. Je prends une autre inconnue $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre f marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de z, zz, & z^4 leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aaxx}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité précédente, je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = o$; je prends une troisieme inconnue y telle qu'étant multipliée par f son produit fy soit égal au quarré xx de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1°. $xx - fy = o$; & substituant à la place de xx, & de x^4 leurs valeurs fy & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$, &c. j'ai pour seconde équation.

2°. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, laquelle étant ajoutée à la premiere, donne pour troisieme équation.

3°. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu est * un cercle lorsque les inconnues & indéterminées x & y font entr'elles un angle droit. Je multiplie la premiere équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle g exprime une ligne telle qu'on veut de même que f, & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = o$; & ajoutant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatrieme & la cinquieme équation.

* *Art.* 324 & 329.

4°. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu est * une Ellipse.

* *Art.* 324.

5°. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles oppofées.

* *Art.* 332.

REMARQUE.

395. S'IL arrive que quelques termes de l'égalité propofée ayent des fignes différens de celle-ci, ou qu'ils

manquent ; les lieux de ces cinq équations ſeront toujours néanmoins des Sections coniques de même nom : c'eſt-à-dire que les lieux de la premiere & de la ſeconde équation ſeront toujours des Paraboles, celui de la troiſieme, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problême.

396. CONSTRUIRE *l'égalité du quatrieme degré* $z^4 + abzz - aacz + a^3d = o$, *avec un cercle donné & une Hyperbole ſemblable à une donnée ; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.*

Je conſtruis ſéparément * les lieux de la troiſieme & de la cinquieme équation, en prenant pour les inconnues & indéterminées x & y les mêmes lignes AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle droit APM ; & les interſections de ces deux lieux me ſervent à déterminer les valeurs de l'inconnue z, de la maniere qui ſuit. * *Art.* 324 & 332. FIG. 220 & 221.

Soit menée par le point A origine des x, la ligne $AD = \frac{af - bf}{2a}$ parallèle à PM, & du même côté lorſque a ſurpaſſe b, & au contraire du côté oppoſé lorſqu'il eſt moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie DG parallèle à AP, ſoient priſes ſur cette ligne du côté de PM la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & ſoit décrit du centre C & du rayon CF ou $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + ef}{2a}$ parallèle à PM & du côté oppoſé, ſoit tirée la droite indéfinie HK parallèle à AP, ſur laquelle ſoient priſes la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté oppoſé à PM, & de part & d'autre du point I les parties IK, IL, égales chacune à $\frac{f}{2g}\sqrt{cc - hg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g}\sqrt{hg - 4dg - cc}$ (on a

pris pour abréger $h = \frac{\overline{b+g}^2}{a}$). Soit enfin décrite de l'axe LK (qui doit être le premier lorsque $cc+4dg$ est plus grand que hg, & le second lorsqu'il est moindre) qui soit à son parametre KO comme a est à g, une Hyperbole ou les Hyperboles opposées qui rencontrent le cercle en des points M, M, d'où soient abaissées des perpendiculaires MP, MP, sur la ligne AP. Je dis que les parties AP, AP, de cette ligne seront les racines de l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = o$; en observant qu'elles sont vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car on trouvera par la propriété du cercle la troisieme équation; & par la propriété de l'Hyperbole, la cinquieme; & ôtant la troisieme de la cinquieme, on aura $\frac{gf}{a}y + fy - \frac{g}{a}xx - xx = o$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de y cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de yy son quarré $\frac{x^4}{ff}$, on trouvera l'égalité x^4, &c. Mais ayant les valeurs de x, on a celles de z; puisque $z = \frac{ax}{f}$.

Maintenant pour satisfaire à la premiere demande du Problême, je nomme le rayon du cercle donné CF, r; & j'ai par conséquent $r = \frac{f}{2a}\sqrt{cc+aa-2ab+bb-4ad}$; d'où il suit que si l'on prend $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc+aa-2ab+bb-4ad}}$, le rayon CF ou CG du cercle qui est le lieu de la troisieme équation, sera égal à la donnée r. Il reste à faire que l'Hyperbole soit semblable à une donnée, c'est-à-dire, que son premier ou second axe LK soit à son parametre KO en raison donnée de m à n; & il est visible qu'il ne faut pour cela que prendre $g = \frac{an}{m}$, puisque $LK. KO :: a. g :: m. n.$

Enfin pour faire en ſorte que l'Hyperbole ſoit donnée, ou, ce qui eſt la même choſe que ſon premier où ſecond axe LK & le parametre KO de cet axe ſoient égaux à des lignes données ; je nomme d'abord le premier axe LK $2t$; ſon parametre KO, p; & j'ai $KO\,(p) = \frac{2gt}{a}$, & $LK\,(2t) = \frac{f}{g}\sqrt{cc+4dg-hg}$ (il faut ſe reſſouvenir que $h = \frac{b+g}{a}$) ; ce qui donne $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-hg}}$: d'où l'on voit que ſi $cc+4dg$ ſurpaſſe hg, & qu'on prenne pour g & pour f ces valeurs, on trouvera dans la conſtruction de la cinquieme équation pour le premier axe LK & ſon parametre KO les lignes données $2t$ & p. Mais s'il arrive que $cc+4dg$ ſoit moindre que hg, il faudra nommer le ſecond axe LK, $2t$; & ſon paramêtre KO, p ; ce qui donne comme ci-deſſus $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{hg-cc-4dg}}$; où l'on doit obſerver que $2t$ & p ne marquent plus à préſent les mêmes lignes qu'auparavant : & s'il arrive que hg, dans cette derniere ſuppoſition où $2t$ marque le ſecond axe, ſurpaſſe $cc+4dg$, il eſt viſible qu'en prenant pour g & f ces valeurs dans la conſtruction de la cinquieme équation, on trouvera pour le ſecond axe LK & ſon parametre KO les lignes données $2t$ & p.

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de f ſoit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces ſuppoſitions ; & alors on voit que la conſtruction devient impoſſible du moins par cette méthode. Or comme tous les Auteurs qui s'en ſont ſervis après M. Sluze qui en eſt l'inventeur, la donnent pour générale ; j'en ferai une remarque à part ; où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette méthode ne réuſſit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fuſſent données, la conſtruction ſeroit toujours poſſible ; car ſi

après avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles $LK, 2t$; & ſon parametre KO, p; il ſe trouvoit que la valeur de $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dc-hg}}$ fût imaginaire, c'eſt-à-dire, que hg ſurpaſsât $cc+4dg$; il n'y auroit qu'à ſe ſervir dans la conſtruction à la place de cette Hyperbole de ſa conjuguée & de ſon ſecond axe, puiſque le ſecond axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de f ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc+4dg=hg$, l'équation du quatrieme degré s'abaiſſe à une du ſecond.

REMARQUE.

397. 1°. SI l'Hyperbole donnée eſt équilatere. On aura $g=a$, & on ſe ſervira dans la conſtruction du Problême de ſon premier axe, lorſque $cc+4dg$ ſurpaſſe hg, c'eſt-à-dire, en mettant pour h ſa valeur $\frac{\overline{b+g}}{a}$, & pour g ſa valeur a, lorſque $cc+4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+a}$; & du ſecond lorſqu'il eſt moindre. Et la conſtruction ſera toujours poſſible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée ſurpaſſe ſon parametre. On ſe ſervira dans la conſtruction du Problême de ſon premier axe, lorſque $cc+4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+a}$; car il ſuit de-là que $cc+4dg$ ſurpaſſe hg, c'eſt-à-dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour h ſa valeur $\frac{\overline{b+g}}{a}$) que $\frac{acc}{g}+4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+g}$, puiſque dans cette ſuppoſition $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ étant moindre que a, la quantité $\frac{acc}{g}+4ad$ ſera plus grande que $cc+4ad$, & $\overline{b+g}$ ſera moindre que $\overline{b+a}$. Au contraire lorſque $cc+4ad$ eſt moindre que $\overline{b+a}$, il faudra ſe ſervir du ſecond axe; car il ſuit de-là que $cc+4dg$ eſt moindre que hg, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ eſt moindre que $\overline{b+g}$

puiſque $2t$ marquent à préſent le ſecond axe qui eſt moindre que ſon parametre p la quantité $\frac{ap}{2t}$ eſt ici plus grande que a. D'où l'on voit que la conſtruction eſt toujours poſſible, non-ſeulement lorſque l'Hyperbole donnée eſt équilatere, mais encore lorſque le premier axe eſt plus grand que ſon parametre.

3°. Si le premier axe eſt moindre que ſon parametre. Il faudra néceſſairement lorſque $cc+4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+a}^{\cdot}$, ſe ſervir du premier axe; car ſi l'on employoit le ſecond, il faudroit que $cc+4dg$ fût moindre que hg, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}^{\cdot}$; ce qui ne peut être, puiſque $2t$ qui exprimeroit alors le ſecond axe étant plus grand que p, la quantité $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ ſeroit moindre que a. Mais en ſe ſervant du premier axe, il peut arriver que $\frac{acc}{g}+4ad$ ſoit moindre que $\overline{b+g}^{\cdot}$, puiſque $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt plus grand que a; & alors il eſt évident que la conſtruction du Problême devient impoſſible, parce que la valeur de $f\left(\frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg}-hg}\right)$ renferme une contradiction. De même lorſque $cc+4ad$ eſt moindre que $\overline{b+a}^{\cdot}$, il faut néceſſairement ſe ſervir du ſecond axe; & comme alors la valeur de $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt moindre que a, il peut arriver que $\frac{acc}{g}+4ad$ ſoit plus grand que $b+\overline{g}^{\cdot}$, & qu'ainſi la valeur de $f\left(\frac{2gt}{\sqrt{hg-cc}-4dg}\right)$ ſoit imaginaire.

Il eſt donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la conſtruction de l'égalité propoſée dans le Problême devient impoſſible; & cela lorſque le premier axe de l'Hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, car autrement elle réuſſira toujours.

REMARQUE.

400. ON peut toujours rendre la conſtruction précédente plus ſimple dans les égalités particulieres qu'on ſe propoſe de conſtruire, en faiſant enſorte que a ſoit égal à b; car il n'y a qu'à réduire l'égalité donnée ſous cette forme $z^4 \mp aazz \mp aacz \mp a^3d = o$, au lieu de cette autre $z^4 \mp abzz \mp aacz \mp a^3d = o$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'eſt qu'on avoit en vue de rendre la conſtruction du Problême générale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire précédent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres différentes b, c, d, au premier degré.

PROPOSITION VI.

Problême.

401. TROUVER *les racines de l'égalité* $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aahh = o$, *par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ſes Aſymptotes, & d'un cercle.*

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transformera l'égalité donnée en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{hhf^4}{aa} = o$. FIG. 222.

Ayant mené d'un point quelconque M de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point A, une parallèle MP à l'une des Aſymptotes AQ, & qui rencontre l'autre au point P, on nommera les inconnues & indéterminées AP, x; PM, y; leſquelles ſont entr'elles un angle donné APM, & on aura par la propriété de l'Hyperbole $xy = mm$, en ſuppoſant que mm en ſoit la puiſſance. Maintenant ſi l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{k}}$, on aura $hff = amm$, & $\frac{hhf^4}{aa} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{hhf^4}{aa}$ qui eſt le dernier terme de l'égalité précédente ſa valeur

$xxyy$, & diviſant enſuite par xx, on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df^3}{ax} + yy = o$, qui ſe change (en mettant dans le terme $\frac{df^3}{ax}$ à la place de x ſa valeur $\frac{hff}{cy}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{hff}{a}$) en cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{h}y + yy = o$, dont le lieu eſt * un cercle lorſque l'angle APM eſt droit.

* *Art.* 328 & 329.

Mais lorſque l'angle APM n'eſt pas droit, ou (ce qui revient au même) lorſque l'Hyperbole donnée n'eſt pas équilatere, il eſt évident que le lieu de la derniere équation n'eſt plus un cercle, mais une Ellipſe. C'eſt pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu ſoit un cercle, je prends ſur l'Aſymptote AP la partie $AB = 2a$: & ayant mené BE parallèle à l'autre Aſymptote AQ, je tire du centre A la perpendiculaire AE ſur BE: & nommant les données BE, g; AE, e; je multiplie l'équation $xy - mm = o$, dont l'Hyperbole donnée eſt le lieu, par $\frac{g}{a}$; & j'ai $\frac{gxy}{a} - \frac{gmm}{a} = o$. J'ajoute enſuite cette équation à la précédente lorſque l'angle fait par les Aſymptotes eſt aigu, & je l'en retranche lorſqu'il eſt obtus comme je le ſuppoſe dans cette figure: cela me donne $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{h}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff + gmm}{a} = o$, dont le lieu eſt un cercle * qui ſe conſtruit ainſi.

* *Art.* 327 & 329.

FIG. 222.

Soit priſe ſur l'Aſymptote AQ la partie $AD = \frac{df}{2h}$ du côté oppoſé à PM: ſoit tirée parallèlement à AE, la ligne $DC = \frac{bf}{e} - \frac{def}{2eh}$ du côté de PM lorſque cette valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt négative: enfin du centre C & du rayon $CM = \sqrt{\overline{AC}^2 + \frac{cff - gmm}{a}}$ ſoit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & ſon oppoſée en des points M, d'où ayant mené des parallèles MP à l'Aſymptote

AQ; les parties AP de l'autre Aſymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{hhf^4}{aa} = o$: ſçavoir celles qui ſont du côté de PM, les vraies; & celles qui ſont du côté oppoſé, les fauſſes.

Car par la propriété du cercle, on trouve cette équation $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{h}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff+gmm}{a} =$ qui ſe réduit (en mettant pour xy ſa valeur mm) à cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{af}{h}y + yy = o$, dans laquelle mettant enfin pour y ſa valeur $\frac{mm}{x}$ ou $\frac{hff}{ax}$, & pour yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'égalité même propoſée $x^4 - \frac{bf}{a}x^3$, &c.

Si l'angle fait par les Aſymptotes étoit aigu; il faudroit changer dans les valeurs de AD & de CM, les ſignes des termes où g ſe rencontre, dont la raiſon eſt que BE (g) devient négative de poſitive qu'elle étoit. Mais lorſque l'Hyperbole eſt équilatere, il faut effacer les termes où g ſe rencontre & mettre pour e ſa valeur $2a$, parce que AE tombe alors ſur AB: ce qui rend la conſtruction beaucoup plus ſimple.

Lorſqu'on a les différentes valeurs de x, il eſt évident qu'on a auſſi celles de z, en faiſant $z = \frac{ax}{f}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

COROLLAIRE I.

402. SI le dernier terme de l'égalité propoſée du quatrieme degré, avoit le ſigne —, il eſt clair qu'en opérant comme ci-deſſus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme yy auroit le ſigne —, & dont le lieu par conſéquent ne ſeroit pas un cercle, mais * une Hyperbole. D'où l'on voit que cette méthode ne peut ſervir que pour les égalités du quatrieme degré qui ont leur dernier terme avec le ſigne +. * *Art.* 332.

COROLLAIRE II.

403. ON pourra toujours en ſe ſervant de la méthode précédente, réſoudre toute égalité donnée du troiſieme degré $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = o$; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ſes Aſymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par $x + r$ lorſqu-il y a $+aaq$, & par $x - r$ lorſque c'eſt $-aaq$, on la changera toujours en cette autre du quatrieme degré.

$$x^4 \mp nx^3 \mp apxx \mp aaqx + aaqr = o,$$
$$\mp r \quad \mp nr \quad \mp apr$$

dont le dernier terme $aaqr$ aura toujours le ſigne $+$, & qui ſera par conſéquent du nombre de celles qu'on peut conſtruire de la maniere précédente.

Mais on abrégera beaucoup la conſtruction en obſervant, 1°. de prendre pour l'unité arbitraire a la ligne m racine de la puiſſance de l'Hyperbole donnée, qui eſt le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puiſque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée r pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$; ce qui donne $r = \frac{aa}{q}$. 3°. Que le cercle qui doit déterminer par ſes interſections les racines de l'égalité coupera néceſſairement l'Hyperbole lorſqu'il y a $-aaq$, & ſon oppoſée lorſque c'eſt $+aaq$, en un point K, d'où ayant mené une parallèle KH à l'Aſymptote AQ, la partie AH de l'autre Aſymptote doit être égale à r, puiſque l'égalité du quatrieme degré a pour une de ſes racines $x = \mp r$. De-là on tire cette conſtruction qu'il eſt facile de rendre générale pour toutes les égalités du troiſieme degré.

FIG. 213.

Je ſuppoſe que l'angle fait pas les Aſymptotes de l'Hyperbole donnée ſoit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire a la racine de la puiſſance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troiſieme degré ſous cette expreſſion $x^3 - nxx - apx - aaq = o$. Ayant pris ſur l'Aſymptote AP la partie $AB = 2a$, & mené BE parallèle à l'autre Aſymptote AQ, on tire

du centre A la perpendiculaire AE ſur BE ; & ayant pris ſur AQ la partie $AL=q$ du côté de PM, parce qu'il y a $-aaq$ dans l'égalité donnée, on tirera LK parallèle à AP, & qui rencontre l'Hyperbole au point K. Cela fait, on nommera les données BE, g ; AE, e ; LK, r ; & on prendra ſur l'Aſymptote AQ la partie $AD=\frac{pr}{2a}-\frac{1}{2}q=\overline{+}d$ pour abréger, & on tirera $DC=\frac{an+ar\overline{+}dg}{e}$ parallèle à AE, en obſervant de prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorſque leurs valeurs ſont poſitives & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont négatives. On décrira enfin du centre C, & du rayon CK, un cercle qui coupera les Hyperboles oppoſées en des points M, d'où ayant mené les droites MP parallèles à l'Aſymptote AQ ; les parties AP de l'autre Aſymptote ſeront les racines de l'égalité propoſée $x^3-nxx-apx-aaq=o$.

Car prolongeant les droites MP, KH, juſqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DC auſſi prolongée, s'il eſt néceſſaire, aux points G, F ; on aura (à cauſe des triangles rectangles CFK, CGM) ces deux égalités $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CM}$, & $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CK}$: & par conſéquent $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CF}$, puiſque les lignes CM, CK, ſont rayons d'un même cercle. Or par la conſtruction (je ſuppoſe ici pour éviter l'embarras des ſignes $+$ & $-$, que $\frac{pr}{2a}-\frac{1}{2}q=+d$, c'eſt-à-dire, que cette valeur eſt poſitive) GM ou $PM+PG=y+\frac{g}{2a}x+d$, CG ou $DG-DC=\frac{ex}{2a}-\frac{an-ar-dg}{e}$, FK ou $KH+HF=q+\frac{g}{2a}r+d$, CF ou $CD-DF=\frac{an+ar+dg}{e}-\frac{er}{2a}$. C'eſt pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité précédente $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CF}$, on en formera d'abord celle-ci $yy+\frac{g}{a}xy+2dy+\frac{gg+ee}{4aa}xx$

$-nx-rx=qq+\frac{g}{a}rq+2dq+\frac{gg+ee}{4aa}rr-nr-rr$, en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les quarrés de d & de $\frac{an+ar+dg}{e}$ qui se détruisent mutuellement. Si l'on considere à présent qu'à cause de l'Hyperbole, le rectangle $xy=rq$, & qu'à cause du triangle rectangle AEB le quarré $4aa=gg+ee$, on changera l'équation précédente en celle-ci $yy+2dy+xx-nx-rx=qq+2dq-nr$, dans laquelle mettant d'abord à la place de $2d$ sa valeur $\frac{pr}{a}-q$, & ensuite à la place de y & yy leurs valeurs $\frac{aq}{x}$ & $\frac{a^4}{xx}$, & ordonnant l'égalité il vient

$$x^4-nx^3-apxx-aaqx+a^4=o,$$
$$-r+nr+apr$$

qui étant divisé par $x-r$, donne enfin $x^3-nxx-apx-aaq=o$, qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction générale il faut observer, 1°. de prendre la partie AL sur l'Asymptote AQ du côté opposé à PM lorsqu'il y a $+aaq$ dans l'égalité donnée; & de changer de signes les termes où q & r se rencontrent dans les valeurs de AD, DC, 2°. de changer de signes le terme où p se rencontre dans la valeur de AD lorsqu'il y a $+apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorsque ce terme y manque : il faut faire la même chose à l'égard du terme où n se rencontre dans la valeur de DC, lorsqu'il y a $+nxx$. 3°. De changer de signe le terme où g se rencontre dans la valeur de DC, lorsque l'angle fait par les Asymptotes est obtus, & de l'effacer lorsqu'il est droit, en observant alors que $e=2a$.

REMARQUE.

404. L'ALGEBRE nous fournit des moyens faciles pour transformer toute égalité du quatrieme degré, en une autre du même degré dont les signes des termes soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

aura toujours le ſigne +, il eſt viſible qu'en ſe ſervant de cette préparation lorſque le dernier terme de l'égalité qu'on veut conſtruire a le ſigne —, on rend la méthode du Problême générale pour toutes ſortes d'égalités du quatrieme degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité ſont vraies, lorſque les ſignes de ſes termes ſont alternatifs ; il s'enſuit qu'on n'a beſoin alors que de l'Hyperbole donnée, puiſque ſon oppoſée qui ne ſert que pour les racines fauſſes devient inutile.

PROPOSITION VII.

Problême.

405. SOIT *propoſée à conſtruire l'égalité du ſixieme degré* $x^6 - bx^5 + acx^4 + aadx^3 + a^3exx - a^4fx + a^5g = o$, *ou* $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = o$ (*en ſouſentendant la ligne* a *qui rend le nombre des dimenſions egal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité*) ; *par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troiſieme degré.*

Je prends pour le lieu du troiſieme degré $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, dans lequel les quantités m, n, p, q, que l'on regarde comme données, ſe doivent déterminer d'une maniere convenable pour ſatisfaire au Problême ; ce que je fais en cette ſorte :

en quarrant chaque membre, j'ai

$$x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy,$$
$$\qquad\quad -2n \qquad +2q \qquad -2mq$$

& comparant les termes $-2mx^5$, $-2nqx$, $+qq$ avec leur correſpondans dans la propoſée $-bx^5$, $-fx$, $+g$, je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par conſéquent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$ Si l'on met à préſent à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ ſa valeur $ppxxyy - mmx^4$, &c. trouvée par le moyen de l'équation précédente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ ſa valeur $-cx^4 - dx^3$, trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant diviſé par xx, on tranſ-

poſe toutes les quantités d'un même côté, on formera cette équation

$$\begin{array}{lllll} ppyy & -mmxx & -2mnx & -nn & =o, \\ & +2n & -2q & +2mq & \\ & +c & +d & +e & \end{array}$$

dont le lieu ſera * un cercle ſi la quantité $c+2n-mm$ (qui multiplie le quarré xx) eſt poſitive, & qu'on prenne $pp=c+\frac{f}{\sqrt{g}}-\frac{1}{4}bb$; car diviſant par pp, & faiſant pour abréger $2r=\frac{2mn+2q-d}{pp}$ & $ss=\frac{2mq+e-nn}{pp}$ ou $\frac{nn-2mq-e}{pp}$, on aura $yy+xx-2rx\mp ss=o$: ſçavoir $+ss$ lorſque $2mq+e$ ſurpaſſe nn; & $-ss$, lorſqu'il eſt moindre.

* *Art.* 328 & 329.

Pour conſtruire la ligne courbe qui eſt le lieu de la premiere équation $x^3-xx-nx+q=-pxy$, je ſuppoſe à l'ordinaire deux lignes droites inconnues & indéterminées AP (x), PM (y) qui faſſent entr'elles un angle droit APM; & je tire par l'origine A des x, une ligne droite indéfinie AQ parallèle à PM, ſur laquelle ayant pris du côté de PM la partie $AG\frac{n}{p}$, & du côté oppoſé la partie $GB=\frac{q}{mp}$, je mene du côté de PM la droite $BC=m$ perpendiculaire à AQ. Cela fait, je décris ſur un plan ſéparé une Parabole MEM qui ait pour parametre de ſon axe la ligne $p=\sqrt{c+2n-mm}$, & ayant placé ce plan ſur celui-ci, enſorte que l'axe de la Parabole ſe confonde avec la ligne AQ & que la Parabole s'étende vers le côté oppoſé à PM, je prends ſur cet axe depuis ſon origine E vers le dedans de la Parabole la partie $EF=BG=\frac{q}{mp}$. Je me ſers enfin d'une longue regle indéfinie CF mobile autour du point fixe C, & qui paſſe toujours par le point F, & la faiſant tourner autour du point C, enſorte qu'elle faſſe gliſſer la partie EF de l'axe de la Parabole le long de la ligne AQ. Je dis que les deux interſections continuelles M, M, de cette regle avec la Parabole MEM décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui ſeront le lieu qu'on

FIG. 224.

qu'on demande. Car par la conſtruction AB ou $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la propriété de la Parabole $EQ = \frac{xx}{p}$ puiſque AP ou $MQ = x$. Or les triangles ſemblables FQM, MDC, donnent FQ ou $EQ - EF \left(\frac{xx}{p} - \frac{q}{mp}\right)$. $QM(x) :: DM$ ou $PM - AB\left(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{p}\right)$. $CD\ (m - x)$. Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et ſi l'on prend ſucceſſivement les points M dans les trois angles qui ſuivent celui-ci, on trouvera toujours la même équation, en obſervant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorſque les points P & M tombent du côté oppoſé à celui-ci : de ſorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, ſeront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnue y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnue x, dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour conſtruire le cercle qui eſt le lieu de la ſeconde équation, $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, il n'y a qu'à prendre ſur la droite indéfinie AP la partie $AH = r$ du côté de PM lorſque la valeur de r eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt négative ; enſuite du centre H & du rayon $HM = \sqrt{rr \mp ss}$, ſçavoir $-ss$ lorſqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorſque c'eſt $-ss$, décrire un cercle ; car à cauſe du triangle rectangle HPM, on aura toujours $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$, c'eſt-à-dire en mettant les valeurs analytiques, & tranſpoſant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx \mp ss = o$.

Je dis maintenant que ſi des points M où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des pependiculaires MQ ſur la droite indéfinie AQ ; ces lignes ſeront les racines de l'égalité propoſée : ſçavoir celles qui tombent à droit, les vraies ; & celles qui tombent à gauche, les fauſſes. Car menant des parallèles MP à AQ, on trouve par la propriété des conchoïdes

cette équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, c'eſt-à-dire, en quarrant chaque membre, $ppxxyy = -x^6 - 2mx^5$, &c; & par la propriété du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = -ppx^4 + 2pprx^3 \mp ppssxx$. Et comparant enſemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle ſi l'on met à la place de $2r$, ss, pp, m, n, q, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité propoſée $x^6 - bx^5$, &c.

S'il y avoit dans l'égalité propoſée $-dx^3$ au lieu de $+dx^3$, il eſt viſible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn+2q+d}{pp}$, le reſte de la conſtruction ne changeroit point, puiſque d ne ſe rencontre que dans la valeur de r. Et comme alors tous les ſignes des termes de l'égalité propoſée ſont alternatifs ; c'eſt une maxime reçue en Algébre que toutes ſes racines réelles ſeront vraies ; c'eſt-à-dire, que ſi cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles ſeront vraies ; ſi elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre ſeront vraies ; & enfin ſi toutes les ſix ſont réelles, elles ſeront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a beſoin alors que de la conchoïde qui eſt décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe C, puiſque l'autre ne ſert que pour les racines fauſſes.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin ſi petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point ; ce ſeroit une marque infaillible que toutes les racines de l'égalité ſeroient imaginaires. S'il les coupoit en ſix points, toutes les racines ſeroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres ſeroient imaginaires. Il faut toujours prendre garde que ſi le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réuniſſoit deux points infiniment proches, enſorte que l'égalité propoſée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point ſur BE.

REMARQUE I.

406. IL ſuit de la deſcription des deux conchoïdes paraboliques, 1°. qu'elles ont pour Aſymptote commune la droite BE infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes paſſe par le point fixe C, & qu'alors la regle CF la touchera en ce point; puiſque le point M ſe réuniſſant au point C, la regle paſſe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorſque le point F tombe ſur B, la regle CF qui décrit par les interſections M, M, avec la Parabole les conchoïdes, tombe ſur CB; & qu'ainſi la ligne MFM devient la double ordonnée qui part du point F: c'eſt-à-dire que la ligne CB rencontre les conchoïdes en deux points K, L, tels que BK & BL ſont égales chacune à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point F. D'où il eſt clair que ſi BC étoit égale à cette ordonnée, le point K tomberoit alors ſur le point C; & qu'ainſi la ligne BC qui paſſeroit par deux points infiniment proches K, C de la conchoïde la toucheroit en ſe réuniſſant toute entiere dans le ſeul point C.

Il n'eſt pas néceſſaire de ſe ſervir de la Parabole MEM pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris ſur BE la partie BO égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque OR plus grand que OB un cercle qui coupe BC aux points D, D; on prendra ſur ce diametre la partie RS égale à EF, & on tirera par le point fixe C les deux droites CM, CM, parallèles à DS, DS, qui rencontreront les parallèles DM, DM, à EB en des points M, M, qui ſeront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé CM juſqu'à ce qu'elle rencontre l'Aſymptote BE au point F; & mené MQ parallèle à BC; il eſt clair que les triangles rectangles MQF, DBS, ſeront égaux, & qu'ainſi FQ eſt égale à BS. Or ayant pris RS égale à EF; on aura $EF+FQ$, ou $EQ=RS+SB$ ou RB; & la Parabole EM qui a pour ſommet le point E, & pour FIG. 225.

parametre une ligne égale à BO, paſſera par le point M; puiſque par la propriété du cercle le quarré de BD ou MQ, eſt égal au rectangle de BR ou EQ par le parametre BO; ce que donne auſſi le propriété de la Parabole. D'où il ſuit que le point M trouvé par cette conſtruction, n'eſt pas différent de celui que donneroit l'interſection de la regle CF avec la demie Parabole EM. *Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point D étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point R, que mener DR perpendiculaire à OD; & le reſte de la conſtruction ne changeroit point.

J'avertirai ici en paſſant, 1°. que ſi l'on prend ſur BC du côté du point C, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité du troiſieme degré $x^3 - \frac{1}{2}mxx - \frac{1}{2}mnp = o$ (les données $BC = m$, $EF = n$, $BO = p$); & qu'on trouve enſuite le point M comme l'on vient d'enſeigner: ce point ſera plus éloigné de la droite BC que tous les autres points de la portion KMC, de ſorte que la tangente qui paſſe par ce point ſera parallèle à BC. 2°. Que ſi l'on prend ſur BC prolongée de l'autre côté du point B, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité $x^3 - mnp = o$; le point M de la conchoïde qui répond au point D, en ſera le point d'inflexion : c'eſt-à-dire, le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le ſuppoſer comme vrai, & remettre à en chercher la raiſon après avoir lu ce Livre ou quelque choſe d'équivalent, d'autant plus que cela eſt inutile pour la réſolution des égalités du ſixieme degré dont il eſt ici queſtion.

REMARQUE II.

407. IL eſt viſible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut, 1°. que la ligne BC ($\frac{1}{2}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainſi l'égalité propoſée doit avoir un ſecond terme. 2°. Que le terme q ne peut être

nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, puiſqu'en diviſant par x, elle deviendroit cette autre $xx - mx - n = -py$, dont le lieu eſt une Parabole ; d'où il eſt clair que le dernier terme g ſe doit trouver dans l'égalité propoſée avec le ſigne $+$, puiſque $q = \sqrt{g}$.

De plus ſi le terme fx avoit le ſigne $+$, on lui donneroit le ſigne $-$ en changeant auſſi les ſignes du deuxieme & du quatrieme terme ; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit ſeulement les racines fauſſes en vraies & les vraies en fauſſes. Et afin que le lieu de la deuxieme équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \overline{+} c$ (ſçavoir $+c$ lorſqu'il y a $+cx^4$, & $-c$ lorſqu'il y a $-cx^4$) ſurpaſsât $\frac{1}{4}bb$. D'où l'on voit que le terme fx manquant, il faut que le terme cx^4 ait le ſigne $+$, & que c ſurpaſſe $\frac{1}{4}bb$; & que ſi le terme cx^4 manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit ſurpaſſer $\frac{1}{4}bb$.

Il eſt donc évident que ce ſont là les conditions que doit avoir néceſſairement l'égalité propoſée du ſixieme degré, afin qu'on la puiſſe conſtruire immédiatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la précédente.

REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'eſt que du cinquieme degré, on peut ſouvent en l'élévant au ſixieme, lui donner en même tems toutes les conditions néceſſaires pour être conſtruite immédiatement. En voici quelques exemples.

Soit, 1°. $x^5 - a^4b = o$, où l'on ſuppoſe que a ſurpaſſe b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du ſixieme $x^6 - bx^5 - a^4bx + x^4bb = o$, qui a toutes les conditions requiſes dans la remarque précédente.

Soit, 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^4x - a^4b = o$, dans laquelle a ſurpaſſe b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4xx - 6a^4bx + a^4bb = o$, qui a toutes les conditions néceſſaires.

Soit, 3°. $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = o$. Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne $x^6 - 5ax^5 + 19a^3x^3 - 9aaxx - 13a^5x + 4a^6 = o$, qui eſt une égalité du ſixieme degré, dans laquelle toutes les conditions néceſſaires ſe rencontrent.

Il eſt bon d'avertir que la premiere égalité $x^5 - a^4b = o$, ſert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes A, B; que la ſeconde $x^5 - 5aax^3$, &c. ſert à diviſer un angle donné en cinq parties égales; & enfin que la troiſieme $x^5 - ax^4$, &c. ſert à inſcrire dans un cercle donné un Polygone régulier de onze côtés: & c'eſt ce qu'on verra dans les articles du Livre ſuivant. Je vais donner la conſtruction de la premiere de ces égalités, afin qu'on la puiſſe comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troiſieme Livre de la Géométrie de M. Deſcartes.

FIG. 226. Ayant décrit une Parabole ME qui ait pour le parametre de ſon axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$, GB ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{5aab}{4pp}$, & une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; on décrira d'abord une conchoïde parabolique COM (comme l'on a enſeigné dans l'article 404.) à l'aide de la Parabole ME, & d'une longue regle CF qui tourne librement autour du point fixe C, & qui paſſe toujours par le point F, pendant que la partie EF de l'axe de la Parabole gliſſe le long de la ligne AQ; & enſuite un cercle du centre H & du rayon $HM = \sqrt{\overline{AH}^2 \mp ss}$, ſçavoir $+ss$ lorſque $4bb$ ſurpaſſe aa, & $-ss$ lorſqu'il eſt moindre. Je dis que ſi des points O, M, où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires OR, MP, ſur AP; les parties AR, AP, ſeront les racines de l'égalité $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = o$. Cela ſe prouve comme dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre H, doit couper la conchoïde COM en un point O, tel qu'ayant mené OR perpendiculaire sur AP, on a la partie $AR = b$; puisque l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pourquoi ayant pris sur AP la partie $AR = b$, & tiré RO perpendiculaire à AP & qui rencontre en O la conchoïde COM; il n'y a qu'à décrire du centre H & du rayon HO un cercle. Car il la coupera en un autre point M, tel, qu'ayant mené MP perpendiculaire sur AP, la ligne AP sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre H ne coupe la conchoïde qui passe par le point C qu'en deux points O, M, & ne rencontre point l'autre; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^6 - b\,x^3$, &c. n'a que deux racines vraies AR, AP, & les quatre autres imaginaires.

REMARQUE IV.

409. LORSQUE l'égalité donnée du sixieme degré, n'a point les conditions nécessaires pour être construite immédiatement par la méthode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquieme degré, la remarque précédente se trouve inutile, on pourra se servir de la préparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisieme Livre de sa Géométrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquieme & du sixieme degré en une autre du sixieme, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connue du troisieme terme surpasse le quarré de la moitié de la quantité connue du second: ce qui rend la construction du Problême générale pour toutes sortes d'égalités du cinquieme & du sixieme degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette préparation; parce qu'elle dépend de l'Algébre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la Propoſition ſuivante une conſtruction générale pour toutes ſortes d'égalités du cinquieme & du ſixieme degré, qui ne ſuppoſe point d'autre préparation que celle de faire évanouir le ſecond terme.

PROPOSITION VIII.

Problême.

410. TROUVER *les racines de l'égalité* $x^6 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = o$, *par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.*

FIG. 227. Soit $aay = x^3$ l'équation dont le lieu eſt la premiere Parabole cubique MAM ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$). Je mets dans l'égalité propoſée à la place de x^6 ſa valeur a^4yy, à la place de x^4 ſa valeur $aaxy$, & à la place de x^3 ſa valeur aay; ce qui la change en cette équation du ſecond degré $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^4}xx - \frac{f}{a^4}x + \frac{g}{a^4} = o$, dont le lieu eſt une Ellipſe * lorſque d ſurpaſſe $\frac{1}{4}bb$, c'eſt-à-dire, lorſque la quantité connue qui multiplie xx ſurpaſſe le quarré de la moitié de la quantité connue qui multiplie x^4, comme je le ſuppoſe ici. Et ſi l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité propoſée, & qui y eſt ſousentendue, ſoit égale au parametre a de la Parabole cubique donnée; cette équation ſe changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = o$, dont voici la conſtruction.

* *Art.* 323.

Ayant pris ſur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on tirera parallèlement à PM & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point A la droite AE (e), & par le point D une parallèle DG à AE, ſur laquelle on prendra du côté de PM la partie DC (s) $= \frac{2afe + bce}{4ad - bb}$, & de part & d'autre du point C les parties

parties CK, CL, égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee - 4agee}{4ad - bb}}$. Cela fait, du diametre LK ($2t$) qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4adt - bbt}{2ee}$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM, on décrira l'Ellipſe cherchée.

Maintenant ſi des points de rencontre de cette Ellipſe avec la Parabole cubique donnée, on abaiſſe des lignes MP qui faſſent avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, les parties AP de la droite indéfinie ſur laquelle s'étend l'indéterminée x ſeront les racines cherchées, ſçavoir celles qui tombent du côté où l'on a ſuppoſé PM en faiſant la conſtruction, les vraies; & celles qui tombent du côté oppoſé, les fauſſes. Car par la propriété de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = o$, & par la propriété de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$; & mettant cette valeur à la place de y & ſon quarré à la place de yy dans l'équation précédente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3$, &c. $= o$.

REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquieme ou du ſixieme degré étant donnée, ſi l'on en fait évanouir le ſecond terme, & qu'après l'avoir multipliée par l'inconnue x lorſqu'elle n'eſt que du cinquieme degré, on ſe ſerve du parametre a de la Parabole cubique donnée pour réduire ſous l'expreſſion ab les quantités connues qui multiplient x^4, ſous l'expreſſion aac celles qui multiplient x^3, &c; il eſt viſible qu'en faiſant la ſubſtitution comme ci-deſſus, on transformera toujours l'égalité donnée en un lieu du ſecond degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque a, & dont l'angle APM que font les appliquées PM avec le diametre AP, peut-être pris à volonté; on pourra toujours par

ſon moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, réſoudre toutes ſortes d'égalités du cinquieme & du ſixieme degré.

REMARQUE II.

412. LORSQU'APRÈS avoir fait évanouir le ſecond terme d'une égalité donnée du cinquieme & du ſixieme degré, & l'avoir multipliée par l'inconnue x ſi elle n'eſt que du cinquieme; la quantité connue qui multiplie le quarré xx eſt poſitive, & ſurpaſſe le quarré de la moitié de celle qui multiplie x^4: on arrivera toujours en faiſant la ſubſtitution par le moyen de $aay = x^3$, à une équation du ſecond degré dont le lieu eſt une Ellipſe, comme l'on a vu dans ce Problême. Or l'on pourra toujours faire enſorte que cette Ellipſe devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

* *Art.* 378. Ayant trouvé une ligne a * dont le quarré de quarré a^4 ſoit égal à la quantité connue qui multiplie xx, on ſe ſervira de cette ligne a pour réduire ſous l'expreſſion ab toutes les quantités connues qui multiplient x^4, ſous l'expreſſion aac celles qui multiplient x^3, &c; ce qui réduira l'égalité donnée ſous cette forme $x^6 \pm abx^4 \pm aacx^3 + a^4xx \pm a^4fx \pm a^5g = o$. Et mettant a^4yy, $aaxy$ & aay à la place de x^6, x^4 & x^3, on trouvera cette équation du ſecond degré $yy \pm \frac{b}{a}xy \pm cy + xx \pm fx \pm ag$ $= o$, dont le lieu ſera * un cercle, ſi l'on fait enſorte que l'angle AEB ſoit droit; ce qui eſt facile en cette maniere.

* *Art.* 327 & 329.

FIG. 228. Ayant pris ſur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle AEB, du côté où l'on ſuppoſe que PM doit tomber, lorſqu'il y a $-\frac{b}{a}xy$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $+\frac{b}{a}xy$. On portera ſur la demi circonfé-

rence de B en E, une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré AE (e), la ligne PM doit être parallèle à BE, & on achevera le reſte de la conſtruction comme pour l'Ellipſe, qui deviendra alors un cercle ; puiſque l'angle CGM ſera droit, & qu'à cauſe du triangle rectangle AEB il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raiſon du diametre LK à ſon parametre. La figure qui eſt ici à côté repréſente la conſtruction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = o$, qui n'eſt différente de celle du Problême qu'en ce que $d = a$.

Maintenant ayant pris ſur la ligne AB autant de parties AP, AP, &c. qu'on voudra, & mené des parallèles PM, PM, &c. à BE ; on prendra chaque PM égale à la quatrieme proportionnelle à ſa correſpondante AP & la donnée AB. Et faiſant paſſer une ligne courbe MAM par tous les points M ainſi trouvés, il eſt évident qu'elle ſera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par conſéquent la premiere Parabole cubique qui par ſes points d'interſection M, M, avec le cercle, ſervira à découvrir les racines AP, AP, de l'égalité propoſée.

REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé ſouvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la premiere Parabole cubique pour réſoudre les égalités du cinquieme & du ſixieme degré ; je crois qu'il n'eſt pas hors de propos d'examiner les différentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de poſition deux lignes droites indéfinies BC, DE, qui s'entrecoupent au point A, & ſoit dans l'angle BAD une Parabole AM de tel degré qu'on voudra, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M une parallèle MP à DE, qui rencontre BC au point P ; & ayant nommé les indéterminées AP, x ; PM, y ; la donnée AB, 1 ; on ait toujours $x^m = y^n$ (les lettres m & n marquent les expoſans des puiſſances de FIG. 219.

x & y qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra ; & l'on suppose seulement que m surpasse n). Il est évident, 1°. que $AP\,(x)$ étant nulle ou zéro, $PM\,(y)$ l'est aussi, & que plus $AP\,(x)$ croît, plus aussi $PM\,(y)$ augmente ; & cela à l'infini. 2°. Que la soutangente PT* $\left(\frac{n}{m}\,x\right)$ est toujours moindre que $AP\,(x)$, puisque l'on suppose ici que n soit moindre que m. D'où il suit que la Parabole AM de tel degré qu'elle puisse être, passera toujours par le point A ; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC que l'on regarde comme son diametre ; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diametre. Mais comme la ligne courbe AM qui tombe dans l'angle DAB, n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles DAC, CAE, EAB, elle doit se continuer ; & pour cela il faut distinguer trois différens cas.

* *Art.* 237.

Premier cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre pair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre impair. La racine m de x^m sera $\overline{+}x$, & la racine n de y^n sera seulement $+y$; car soit par exemple, $m=4$ & $n=3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatrieme de $\overline{+}x$ est toujours x^4, & qu'il n'en est pas de même du cube de $\overline{+}y$; puisque le cube de $+y$ est y^3, & celui de $-y$ est $-y^3$. De-là il est évident que $AP\,(x)$ peut être positive & négative, & $PM\,(y)$ toujours positive ; d'où l'on voit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle DAC, qui est à côté de l'angle BAD, enforte que si par un point quelconque K de la ligne AD, on tire une parallèle à BC, elle rencontrera la Parabole MAM en deux points M, M, qui seront également éloignés du point K. Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx=ay$, ou $xx=y$ en faisant le parametre $a=1$.

FIG. 229.

Second cas. Lorsque les exposans m & n sont des nombres impairs. La racine m de x^m sera seulement $+x$, & de même la racine n sera $+y$; mais parce que l'équation

$-x^m = -y^n$ eſt la même que $x^m = y^n$, & que la racine m de $-x^m$ eſt $-x$, & la racine n de $-y^n$ eſt $-y$; il s'enſuit que AP (x) peut être poſitive & négative de même que PM (y), en obſervant que lorſque AP eſt poſitive, PM l'eſt auſſi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole AM doit alors ſe continuer dans l'angle CAE oppoſé au ſommet à l'angle BAD, dans une poſition toute ſemblable, mais renverſée; enſorte que prenant AP égale à AP, & menant PM qui faſſe avec AP l'angle APM égale à l'angle APM; cette ligne PM rencontre la portion AM qui tombe dans l'angle CAE, en un point M tel que PM eſt égal à PM. Telle eſt la premiere Parabole cubique $x^3 = aay$, ou $x^3 = y$ en faiſant $a = 1$. FIG. 130.

Troiſieme cas. Lorſque l'expoſant m de la puiſſance de x eſt un nombre impair, & l'expoſant n de la puiſſance de y un nombre pair. La racine m de x^m ſera toujours $+x$, & la racine n de y^n ſera $\mp y$; car ſoit par exemple, AM une ſeconde Parabole cubique qui eſt le lieu de l'équation $x^3 = ayy$, ou $x^3 = yy$, il eſt clair que la racine cubique de x^3 eſt ſeulement $+x$, & que celle de yy eſt $\mp y$. D'où il ſuit que la Parabole AM doit ſe continuer dans l'angle BAE qui eſt à côté de l'angle BAD; enſorte que ſi l'on mene par un point quelconque P de la ligne AB une parallèle à DE, elle rencontrera la Parabole entiere MAM en deux points M, M, également éloignés du point P. FIG. 131.

Or l'équation générale $x^m = y^n$ appartient toujours à l'un des trois cas; car ſi m & n étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quarrée autant de fois qu'il ſeroit poſſible; ce qui la réduiroit à une équation dont l'un des expoſans ſeroit néceſſairement impair. Et l'on peut toujours ſuppoſer que m ſurpaſſe n; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aax = y^3$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole AM à ceux de la ligne DE, & nommant alors AK, x; KM, y; cette autre équation $x^3 = aay$ FIG. 132.

qui exprimeroit auſſi la nature de la même Parabole AM, & dans laquelle l'expoſant de la puiſſance de x eſt plus grand que celui de la puiſſance de y; de ſorte qu'on pourroit faire alors le même raiſonnement par rapport à la ligne DE, qu'on vient de faire par rapport à la ligne BC. De-là il eſt évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puiſſent être, auront toujours l'une des trois figures précédentes.

PROPOSITION IX.

Problême.

414. SOIT *propoſée à conſtruire l'égalité du huitieme degré* $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx - hx + l = o$, *dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux géometriques; l'un du ſecond degré, & l'autre du quatrieme.*

Ayant pris $xx = ay$ pour le lieu du ſecond degré, on ſubſtituera à la place de $x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3$, & xx, leurs valeurs $a^4y^4, a^3y^3x, a^3y^3, aayyx, aayy, ayx, ay$, & en prenant la droite donnée a pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + aeyy - afxy + aagy - aahx + a^3l = o$ dont le lieu eſt du quatrieme degré, & des plus ſimples; puiſque l'une des inconnues x n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne ſe ſervant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on conſtruit à préſent la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour y autant de différentes grandeurs que l'on voudra, on détermine les valeurs de x qui leur répondent dans la ſeconde équation; le lieu qui paſſera par les extrêmités de toutes les y, & qui ſera par conſéquent celui de la ſeconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui eſt viſible; puiſque

mettant dans cette ſeconde équation pour y ſa valeur $\frac{xx}{a}$, & pour les puiſſances de y les puiſſances de cette valeur, on retrouve l'équation donnée $x^8 - bx^7$, &c $= o$.

COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité a eſt arbitraire, on peut ſuppoſer qu'elle eſt donnée, & qu'ainſi la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation $xx = ay$ eſt donnée. Or il eſt évident qu'on pourra toujours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du ſeptieme ou huitieme degré, en une autre équation du quatrieme, dans laquelle l'inconnue x ne ſe ſe trouve qu'au premier degré. D'où il ſuit que toute égalité du ſeptieme ou du huitieme degré, dans laquelle ou tous les termes ſe rencontrent ou ſeulement une partie, ſe pourra toujours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatrieme degré, dans lequel l'une des inconnues ne ſe trouvera qu'au premier; & cela ſans autre préparation que de prendre pour l'unité le parametre a de la Parabole donnée, afin de réduire ſous l'expreſſion ac les quantités connues qui multiplient x^6, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x^5, &c.

COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuvieme ou du dixieme degré ſe pourra toujours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquieme degré dans lequel l'une des inconnues ne ſe trouvera qu'au premier degré: que les égalités de l'onzieme & du douzieme degré ſe conſtruiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du ſixieme degré; & ainſi de ſuite pour les autres à l'infini.

PROPOSITION X.

Problême.

417. CONSTRUIRE *l'égalité du neuvieme degré* $x^9 - bx^7 + cx^6$, &c $= 0$, *dans laquelle tous les termes ſe rencontrent excepté le ſecond ; par le moyen de deux lieux géométriques chacun du troiſieme degré.*

Ayant pris $x^3 = aay$ pour l'un des lieux du troiſieme degré, on ſubſtituera à la place de x^9, x^7, x^6, &c. leurs valeurs a^6y^3, a^4xyy, a^4yy, &c, & l'on aura pour l'autre lieu du troiſieme degré, en prenant a pour l'unité ;

$y^3 - \frac{b}{a}xyy + cyy$, &c $= o$ dans lequel l'inconnue x ne peut monter qu'au ſecond degré, puiſqu'on ſuppoſe que par-tout où il y a x^3 dans la propoſée, on ſubſtitue à ſa place aay.

Or il eſt viſible que ſi l'on conſtruit ce lieu avec la Parabole cubique, qui eſt le lieu de l'autre équation $x^3 = aay$; leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

COROLLAIRE.

418. TOUTE égalité du ſixieme, du huitieme ou du neuvieme degré étant donnée, il eſt viſible qu'après avoir fait évanouir ſon ſecond terme, & l'avoir multipliée par ſa racine x lorſqu'elle eſt du huitieme degré, & par ſon quarré xx lorſqu'elle n'eſt que du ſeptieme, on la transformera toujours en un lieu du troiſieme degré en ſe ſervant de l'équation $x^3 = aay$ dont le lieu eſt une Parabole cubique donnée, & faiſant la ſubſtitution comme ci-deſſus ; de ſorte que cette maniere eſt générale pour toutes les égalités du ſeptieme, du huitieme, & du neuvieme degré. On trouvera de même que toute égalité du douzieme degré dont le ſecond terme eſt évanoui, ſe transformera en un lieu du quatrieme, en ſe ſervant encore de l'équation $x^3 = aay$; comme auſſi celles du

du dixieme & du onzieme degré en les élévant au douzieme.

Mais si l'on propose une égalité du seizieme degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxieme, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatrieme degré $x^4 = a^3 y$, on la transformera en un lieu du cinquieme. On trouvera de même qu'une égalité du vingtieme degré se transformera en un lieu du sixieme, en se servant encore du lieu du quatrieme degré $x^4 = a^3 y$; comme aussi celles du dix-septieme, dix-huitieme & dix-neuvieme degré : que les égalités du vingt-cinquieme degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxieme, se transformeront en un lieu du sixieme degré, en se servant du lieu du cinquieme $x^5 = a^4 y$; comme aussi toutes les égalités du vingt-unieme, vingt-troisieme, vingt-quatrieme degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

REMARQUE I.

419. IL est à propos de remarquer que si dans une égalité du seizieme degré non-seulement le second terme manquoit, mais le troisieme & le sixieme ; le lieu du cinquieme degré lequel joint avec celui du quatrieme $x^4 = a^3 y$ sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatrieme, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seizieme degré dans laquelle il n'y a que le deuxieme terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquieme, si l'on employe à cet effet le lieu du quatrieme $x^4 = a^3 y$ qui n'a que deux termes ; on n'en doit pas conclure en général, que les lieux les plus simples pour résoudre une équation complette du seizieme degré, doivent être, l'un du quatrieme & l'autre du cinquieme. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatrieme degré composé de plusieurs termes à la

place de $x^4 = a^3y$ qui n'en a que deux, on pourra choisir ce lieu enforte qu'il servira à transformer l'égalité complette du seizieme degré en un autre lieu du quatrieme. En voici la raison. Si l'on prend deux lieux du quatrieme degré dans l'un desquels l'inconnue x monte au quatrieme degré, & dans l'autre l'inconnue y, il est constant par les regles de l'Algebre, qu'en faisant évanouir l'inconnue y par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnue x montera au seixieme degré. Or comme deux lieux du quatrieme degré, peuvent avoir ensemble plus de seize termes, puisque chacun en peut avoir quinze différens, il s'ensuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connues de l'égalite donnée: ce qui suffit pour faire voir la possibilité de construire une égalité complette du seizieme degré par deux lignes du quatrieme.

On doit de même penser que les deux lieux les plus simples pour construire une égalité complette du vingtieme, dix-neuvieme, & dix-septieme degré, seront, l'un du quatrieme, & l'autre du cinquieme, parce que la réduite de ces deux lieux montera au vingtieme degré, & qu'ils pourront contenir ensemble plus de termes que la proposée, & renfermer par conséquent toutes les quantités connues qui s'y rencontrent. Et si l'inconnue avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimensions dans l'égalité proposée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De-là on forme la regle suivante, qui sert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent résoudre une égalité proposée; en sorte qu'ils soient les plus simples qu'il est possible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimension de l'inconnue. Si elle est exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités; & si elle ne l'est pas, ou le reste est égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité: ou le reste est plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré de nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent résoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnue soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixieme degré, & l'autre du septieme; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septieme degré; il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

REMARQUE II.

420. IL arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux différentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuvieme degré $x^9 + a^8x - a^8b = o$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le pénultieme. Je prends l'équation $x^3 = aay$, dont le lieu est une Parabole cubique MAM qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites PM (y) qui font avec les parties correspondantes AP (x) de son axe ou diametre un angle pris à volonté APM que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^6y^3$; ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^3 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur AP prolongée du côté de A la partie $AC = o$; & ayant mené par le point C la droite indéfinie CK parallèle à PM, soit décrite une autre Parabole cubique MCM qui ait pour axe CK, & pour appliquées des droites KM parallèles à AP, & dont le FIG. 133.

parametre $CD=a$. Je dis qu'elle ſera le lieu requis. Car par la conſtruction MK ou $CP=b-x$, & par la propriété de la courbe $CK^3=MK\times\overrightarrow{CD}$, c'eſt-à-dire en termes analytiques $y^3=aab-aax$. Or il eſt évident *, 1°. que ſi des points M où cette dernière Parabole cubique MCM rencontre l'autre MAM, on mene des parallèles MP à CE; les parties AP exprimeront les racines x de l'égalité propoſée $x^3+a^2x-a^2b=o$. 2°. Que les Paraboles cubiques MCM, MAM, ſont préciſément les mêmes; puiſque leurs paramêtres AB, CD, ſont égaux, & que les angles APM, CKM, que ſont leurs appliquées avec leurs axes le ſont auſſi.

La ſituation des deux Paraboles cubiques MAM, MCM, fait connoître que l'égalité propoſée $x^3+a^2x-a^2b=o$, n'a qu'une racine réelle $AP(x)$, qui eſt toujours vraie & moindre que $AC(b)$; de ſorte que les huit autres ſont imaginaires.

PROPOSITION XI.

Problême.

421. CONSTRUIRE *toute égalité de tel degré qu'elle puiſſe être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puiſſe déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.*

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité propoſée tout ſeul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviſer enſuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, répétée autant de fois qu'il ſera néceſſaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes: comme ſi l'on propoſoit $x^4-bx^3+acx^2-aadxx+a^3ex-a^4f=o$, on auroit $f=\frac{x^4}{a^4}-\frac{bx^3}{a^4}+\frac{cx^2}{a^3}-\frac{dxx}{aa}+\frac{ex}{a}$.

FIG. 234. Cela fait, on prendra ſur une ligne droite indéfinie AB dont l'origine fixe ſoit au point A, une partie quelcon-

que AP pour la valeur de x; & ayant mené parallèlement à la ligne AC donnée de position une droite $PM = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ (ce qui se peut toujours faire * en n'employant que des lignes droites), son extrêmité M sera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les intersections M, M, M, &c. avec une ligne droite KM menée parallèlement à AB par le point K tel que $AK = f$, détermineront des parties KM, KM, KM, &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnue x dans l'égalité donnée.

* *Art.* 376.

Car menant les droites MP, MP, MP, &c. parallèles à AC, & nommant les indéterminées AP, x; PM, y; on aura par la propriété de la courbe $ADEM$ cette équation $PM.(y) = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquieme dégré; & par la propriété de la droite KM cette autre $y = f$. Ce qui, en substituant pour y sa valeur f, & multipliant par a^4, donne l'égalité même proposée $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx + a^3ex - a^4f = o$.

Ces sortes de constructions peuvent être très-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une méthode pour déterminer sur la ligne AC les parties AF, AG, telles que les droites FD, GE, parallèles à AB touchent la courbe en des points D, E; il est clair 1°. que si $AK\,(f)$ est moindre que AF & plus grande que AG, comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies KM, KM, KM, & les deux autres imaginaires; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne KM la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si $AK\,(f)$ est moindre que AG, la ligne KM coupera la courbe en cinq points; c'est-à-dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si AK surpasse AF, l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK = AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux-

égales entr'elles ; ſçavoir FD, FD. 5°. Et enfin que ſi $AK=AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, ſçavoir GE, GE.

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point A, ſervira à trouver les racines de l'égalité $x^5-bx^4+acx^3-aadxx+a^3cx+a^4f=0$, qui ne differe de la précédente qu'en ce que le dernier terme a le ſigne $+$; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite KM au-deſſous de AB, puiſque ſon lieu doit être $y=-f$.

REMARQUE.

422. ON peut varier la conſtruction précédente en différentes manieres ; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui ſe ſuivent immédiatement, & les diviſer enſuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnue y, le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troiſieme degré $x^3-abx-aac=0$; je fais $\frac{bx}{a}+c=\frac{x^3}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3=aay$, & $y=\frac{bx}{a}+c$, dont les lieux étant conſtruis ſéparément donneront les racines de l'égalité propoſée. Voici comment.

FIG. 235. Ayant pris à l'ordinaire pour inconnues & indéterminées les deux droites $AP(x)$, $PM(y)$ qui ſont entr'elles un angle quelconque APM, ſoit décrite une premiere Parabole cubique MAM qui ſoit le lieu de la premiere équation $x^3=aay$. Soit menée par le point A origine des x une ligne droite parallèle à PM, ſur laquelle ſoient priſes les parties $AC=b$, $AD=c$ du côté où s'étend PM ; & ayant pris ſur AP prolongée du côté de A la partie $AB=a$, ſoit tirée par le point D une parallèle indéfinie à BC. Je dis que ſi des points M où elle rencontre la premiere Parabole cubique MAM, on mene des parallèles MP à AC ; les cou-

pées AP ſeront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = o$.

Car menant DE parallèle à AP, les triangles ſemblables BAC, DEM, donneront $BA\,(a).\ AC\,(b) :: DE\,(x).\ EM = \frac{bx}{a}$, & par conſéquent $PM\,(y) = \frac{bx}{a} + c$. Or à cauſe de la premiere Parabole cubique MAM, l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de y ſa valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = o$.

S'il y avoit $+b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre AC du côté oppoſé à PM, & il en eſt de même de AD lorſqu'il y a $+c$: de ſorte que cette conſtruction eſt générale pour toute égalité donnée du troiſieme degré. Car il eſt évident qu'après en avoir fait évanouir le deuxieme terme, on peut toujours la réduire ſous l'une de ces formes.

Il eſt viſible qu'on peut ſe ſervir d'une Parabole cubique donnée, puiſqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire a égale à ſon parametre.

PROPOSITION XII.

Problême.

423. APPROCHER *de plus en plus à l'infini de la juſte valeur des racines de toute égalité du troiſieme & du quatrieme degré; & des égalités qui paſſent le quatrieme degré lorſqu'elles n'ont que deux termes: en ne ſe ſervant que de lignes droites & de cercles.*

Soit donnée l'égalité du troiſieme degré $x^3 \mp 2apx - aaq = o$; je la multiplie par x pour l'élever au quatrieme & tranſpoſant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 \mp 2apxx = aaqx$; j'ajoute de part & d'autre $aapp$ pour faire que le premier membre ſoit un quarré, ce qui me donne $x^4 \mp 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx \mp ap$

$=a\sqrt{pp+qx}$; tranſpoſant enfin ap, & extravant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x=\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qx}}$. Je conſidere à préſent que ſi au lieu de la juſte valeur de la racine vraie x, je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple c; il s'enſuit, 1°. que c ſurpaſſe $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$. 2°. Que $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$. ſera encore plus grande que la juſte valeur de x. Cette ſeconde propoſition eſt viſible, mais pour la premiere elle ſe prouve ainſi.

Si l'égalité du troiſieme degré a $+2apx$, il eſt clair que $c^4+2apcc$ * $>aaqc$, d'où il vient en ajoutant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-deſſus, $c>\sqrt{-ap+a\sqrt{pp+qc}}$. Mais lorſqu'il y a $-2apx$, on aura en tranſpoſant $2apx$ & diviſant par x cette égalité $xx=2ap+\frac{aaq}{x}$, d'où il ſuit que ſi l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour x une valeur c plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3-2apx-aaq=0$, la quantité $2ap+\frac{aaq}{c}$ ſera moindre que le quarré xx (puiſque $\frac{aaq}{c}$ eſt moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus forte raiſon que le quarré cc. On aura donc $cc>2ap+\frac{aaq}{c}$, & multipliant par cc, il vient $c^4-2apcc>aaqc$, d'où l'on tire (en opérant comme l'on vient de faire) $c>\sqrt{ap+a\sqrt{pp+qc}}$. Or ceci ſuppoſé, je forme cette ſuite : $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$, $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qf}}$, $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qg}}$, &c, dans laquelle f exprime le terme $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$ qui le précede immédiatement, & de même g exprime le terme $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qf}}$ &c.

Il eſt donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette ſuite ſeront plus grands que la juſte valeur de la vraie racine x, & qu'ils en approchent

* *Ce ſigne ainſi tourné veut dire, ſurpaſſe.*

prochent toujours de plus en plus. Je dis à préſent que ſi on la continue à l'infini, le terme infinitieme (s'il eſt permis de s'exprimer ainſi) ou le dernier terme de cette ſuite, ſera préciſément égal à la valeur cherchée de l'inconnue x. Car ſoit z ce dernier terme, il eſt certain par la nature de la ſuite qu'il approchera de plus près de l'inconnue x que tous les autres termes, & qu'ainſi le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$ qui le ſuivroit immédiatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puiſque s'il étoit moindre il approcheroit de plus près de l'inconnue x, & ſeroit par conſéquent le dernier terme, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la ſuite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui ſoit égal, & on aura par conſéquent $z = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$, c'eſt-à-dire en ôtant les incommenſurables $z^2 \mp 2apz - aaq = o$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raiſonnement ſemblable, que ſi l'on prend une grandeur c plus petite que la juſte valeur de x, tous les termes de cette ſuite iront toujours en augmentant, enſorte que le dernier ſera préciſément égal à la valeur cherchée de x. Voici maintenant comment on peut conſtruire par Géométrie cette ſuite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra ſur l'une d'elles les parties $AB = a$, $AD = p$, du même côté du point A lorſqu'il y a $+2apx$, & de part & d'autre lorſqu'il y a $-2apx$, comme on le ſuppoſe dans ces deux figures; & ſur l'autre les parties $AC = q$, $AP = c$, toujours de part & d'autre de point A. Ayant décrit du diametre CP un demi cercle qui coupe AD en E, on prendra ſur AC la partie AF égale à AE, & on portera ſur AD depuis le point D vers le point A dans le premier cas, & vers le côté oppoſé dans le FIG. 256. 257.

ſecond, la partie DG égale à DF. On décrira enfin du diametre BG un demi cercle qui coupe AP en Q, je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp+qc}}$. Car à cauſe du demi cercle CEP la ligne AE ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cauſe du triangle rectangle FAD l'hypothénuſe FD ou $DG = \sqrt{pp+qc}$, & par conſéquent $AG = p + \sqrt{pp+qc}$, & à cauſe du demi cercle BQG la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp+qc}}$. Nommant à préſent AQ, f; & réïtérant la même opération en ſe ſervant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp+qf}}$, & enſuite par le moyen de AR que j'appelle g, on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp+qg}}$ en réïtérérant encore la même opération: de ſorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes AP, AQ, AR, AS, &c. qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juſte valeur de la vraie racine x de l'égalité propoſée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il eſt à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour AP (c) telle grandeur que l'on veut, car ſi cette grandeur ſe trouve plus grande que la racine x, les autres lignes AQ, AR, AS, &c. vont toujours en diminuant; & au contraire ſi AP eſt moindre que x, elles iront en augmentant: de ſorte que la vraie racine eſt renfermée entre AP de l'une de ces deux ſigures & AP de l'autre, AQ & AQ, AR & AR, AS & AS. D'où l'on voit qu'en formant deux ſuites convergentes, dans l'une deſquelles le premier terme ſoit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toujours en prenant les termes correſpondans de ces deux ſuites, des limites entre leſquelles ſe doit trouver cette racine; de ſorte que la différence de ces limites diminue de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité propoſée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. Nommant m la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'eſt pourquoi diviſant cette égalité par $x-m$, la diviſion ſe fera au juſte (car le reſte $m^3-2apm-aaq=o$, puiſqu'on ſuppoſe $x=m$), & on aura pour quotient l'égalité $xx+mx+mm-2ap=o$, dont la réſolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troiſieme degré peuvent ſe réduire à l'une ou à l'autre de ces deux formes ; car après avoir fait évanouir le ſecond terme, s'il y avoit $+aaq$ en mettant $-aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fauſſes & les fauſſes en vraies. D'où l'on voit que les conſtructions précédentes ſuffiſent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troiſieme degré. Paſſons maintenant au quatrieme.

Soit propoſée l'égalité du quatrieme degré $x^4-3apxx-aaqx-a^3r=o$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on viens d'enſeigner, les racines approchées de l'égalité du troiſieme degré

$$y^3-3ppy+2p^3=o$$
$$+4ary+8apr$$
$$-aqq$$

où l'on doit obſerver d'écrire $-2p^3$ lorſqu'il y a dans la propoſée $+3apxx$; $-4ar$ lorſqu'il y a $+a^3r$; & enfin $-8apr$ lorſque les ſignes des termes $3apxx$ & a^3r ſont différens. Je regarde enſuite l'une de ces racines approchées y comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne $v=\sqrt{ay\mp 2ap}$, ſçavoir $+2ap$ lorſqu'il y a $-3apxx$, & $-2ap$ lorſqu'il y a $+3apxx$; j'ai pour les quatre racines approchées de la propoſée, celles de ces deux égalités du ſecond degré $xx-vx+\frac{ay\mp ap}{2}-\frac{aaq}{2v}=o$ & $xx+vx+\frac{ay\mp ap}{2}+\frac{aaq}{2v}=o$ (en obſervant de prendre $-ap$ lorſqu'il y a $-3apxx$ dans l'égalité propoſée, & $+ap$ lorſque c'eſt $+3apxx$) que l'on conſtruira aiſément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de la regle que donne M. Deſcartes dans le troiſieme Livre de ſa

Géométrie pour réduire toute égalité du quatrieme degré à une du troiſieme, de laquelle connoiſſant une des racines, on a les quatre de la propoſée ; & comme cela dépend de l'Algébre pure, je pourrois le ſuppoſer ici comme démontré. En voici cependant la raiſon en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatrieme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = o$ & $xx + vx + ab + ac = o$, dans leſquelles les lettres $v, a, b, c,$ marquent des inconnues qui doivent être déterminées dans la ſuite, enſorte que le produit de ces deux égalités qui eſt $x^4 \begin{matrix} - vvxx \\ + 2abxx \end{matrix} - 2acvx \begin{matrix} + aabb \\ - aacc \end{matrix} = o$, ſoit en effet l'égalité même propoſée. Pour cela j'en compare les termes correſpondans, & j'ai 1°. $c = \frac{aq}{2v}$. 2°. $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = o$; c'eſt-à-dire en mettant pour b & pour c les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^6 - 6apv^4 \begin{matrix} + 9aappvv \\ + 4a^3rvv \end{matrix} - a^4qq = o$. Et ſi l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la ſubſtitution l'égalité du troiſieme degré.

$y^3 \begin{matrix} - 3ppy \\ + 4ary \end{matrix} \begin{matrix} + 2p^3 \\ + 8apr \\ - aqq \end{matrix} = o$, de laquelle connoiſſant une racine y, on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de v, & enſuite celles de b & de c, leſquelles étant miſes dans les deux égalités planes que l'on a ſuppoſées d'abord, on en formera deux autres dont le produit ſera l'égalité même propoſée, & dont la réſolution par conſéquent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit queſtion que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatrieme degré, on pourroit la trouver immédiatement par une ſuite en cette ſorte.

Soit $x^4 \pm 2apxx - aaqx - a^3r = o$, on trouvera en opérant de même que pour le troiſieme degré $x = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{qx + pp + ar}}$, ce qui donne, en faiſant pour abréger $pp + ar = nn$, cette ſuite conver-

gente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn+qc}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn+qf}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn+qg}}$, &c, dont la conſtruction n'eſt différente des précédentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 \mp 2apxx - aaqx + a^3r = 0$, on trouveroit $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx+pp-ar}}$, & on formeroit lorſque pp ſurpaſſe ar (en faiſant $pp - ar = nn$) la même ſuite convergente que ci-deſſus. Mais il eſt à remarque que lorſqu'il y a $+2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx+pp-ar}$ ſurpaſſe p afin que $\sqrt{-ap + a\sqrt{qx+pp-ar}}$ valeur de la racine vraie x ne renferme point de contradiction ; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par conſéquent il faudra prendre c plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si pp eſt moindre que ar, l'on formera alors, en faiſant $ar - pp = qn$, cette ſuite convergente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qc-qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qf-qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qg-qn}}$, &c, où l'on doit remarquer que lorſqu'il y a $-2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que x ſurpaſſe n ou $\frac{ar+pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx+pp-ar}}$ valeur de x ne renferme point de contradiction, & qu'ainſi on doit prendre c plus grand que n.

Il peut arriver lorſqu'il y a $+r$ dans l'égalité donnée que ces racines ſoient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en conſtruiſant la ſuite ; car on n'a démontré qu'elle eſt convergente qu'en ſuppoſant qu'il y eût une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reſte la conſtruction de la derniere ſuite eſt un peu différente des autres, mais comme elle n'eſt pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette méthode devient embarraſſée lorſqu'on la veut étendre à des égalités complettes qui paſſent le quatrie-

me degré ; c'eſt pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquieme degré qui n'a que deux termes, & qui ſervira de méthode pour les autres plus compoſées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4 b = o$; multipliant par x, & tranſpoſant il vient $x^6 = a^4 b x$, & extrayant la racine quarrée on aura $x^3 = a a \sqrt{b x}$ ou $x^4 = a a x \sqrt{b x}$, & extrayant de nouveau deux fois de ſuite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a \sqrt{x \sqrt{b x}}}$; ce qui fournit cette ſuite convergente, c, $\sqrt{a \sqrt{c \sqrt{bc}}}$, $\sqrt{a \sqrt{f \sqrt{bf}}}$, $\sqrt{a \sqrt{g \sqrt{bg}}}$, &c, dont voici la conſtruction géométrique.

FIG. 238. Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra ſur l'une d'elles la partie $AB = a$, & ſur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point A. Du diametre PC ayant décrit un demi-cercle qui coupe BA prolongée du côté de A en D, & ayant pris ſur AC la partie $AF = AD$, on décrira du diametre PF un autre demi-cercle qui coupe AD en E. On décrira enfin du diametre BE un troiſieme demi-cercle qui coupe AP en Q ; il eſt viſible que $AQ = \sqrt{a \sqrt{c \sqrt{bc}}}$. Nommant à préſent AQ, f ; & réïtérant la même opération en ſe ſervant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{a \sqrt{f \sqrt{bf}}}$, & de même $AS = \sqrt{a \sqrt{g \sqrt{bg}}}$. Et les droites AP, AQ, AR, &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juſte valeur de l'inconnue x de l'égalité donnée $x^5 - a^4 b = o$. Cela ſe prouve de la même maniere que pour les égalités du troiſieme degré.

M. Bernoulli célebre Profeſſeur des Mathématiques à Bâle, eſt l'Auteur de ces ſuites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1689. page 455.

PROPOSITION XIII.

Problême.

424. UNE *portion de Section conique étant donnée, trouver par ſon moyen les racines d'une égalité donnée du troiſieme ou du quatrieme degré.*

On a vu dans le Problême précédent qu'une égalité du quatrieme degré étant donnée, on en peut toujours trouver une du troiſieme, de laquelle connoiſſant une racine on a les quatre de la propoſée; en ne ſe ſervant que de lignes droites, & de cercles. On ſçait de plus que toute égalité du troiſieme degré ſe peut réduire ſous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont l'une des racines eſt vraie, & les deux autres ou fauſſes ou imaginaires. Cela poſé; ſoit $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée BD d'une Parabole, qui a pour axe la ligne CH dont l'origine eſt au point C. Des points B, D, extrêmités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires BG, DH, ſur l'axe, il eſt manifeſte que ſi la vraie racine étoit plus grande que BG, & moindre que DH, le cercle décrit du centre E, trouvé comme l'on a enſeigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de ſecond terme, & du rayon EC, couperoit infailliblement la portion BD en quelque point M; d'où menant la perpendiculaire MQ ſur l'axe, cette ligne MQ en ſeroit la vraie racine. Il eſt donc queſtion lorſque ce cercle ne coupe point la portion BD, de tranſformer cette égalité en une autre dont la vraie racine ſoit renfermée entre les limites BG, DH. Pour le faire, je nomme les données BG, f; DH, g; & je ſuppoſe que l'on ait deux limites m, n, entre leſquelles la vraie racine x ſoit reſſerrée (m eſt moindre que n, & f moindre que g). Ce qui donne x plus grand que m & moindre que n, & multipliant chaque terme par f & diviſant

FIG. 239.

par m, il vient $\frac{fx}{m}$ plus grand que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. Si l'on fait à préſent $z = \frac{fx}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, à la place de x ſa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 \mp \frac{2apff}{mm} z - \frac{aaqf^3}{m^3} = o$, qui aura ſa vraie racine $z = \frac{fx}{m}$ plus grande que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. D'où il ſuit que ſi les limites m, n, étoient telles que $\frac{fn}{m}$ fût égale ou moindre que g, il n'y auroit qu'à conſtruire cette derniere égalité ſelon l'article 387. pour avoir ſa vraie racine MQ (z) par le moyen de la portion donnée BC. De-là on tire la conſtruction ſuivante.

On fera par le Problême précédent deux ſuites convergentes qui approcheront l'une en deſſus & l'autre en deſſous de la vraie racine x de l'égalité donnée $x^3 \mp 2apx - aaq = o$. On choiſira deux termes correſpondans dans ces deux ſuites m, n, qui ſoient tels que $\frac{fn}{m}$ ſoit égale ou moindre que g : ce qui ſe pourra toujours faire, puiſque f eſt moindre que g, & que la différence qui eſt entre m & n diminue continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 + \frac{2apff}{mm} z - \frac{aaqf^3}{m^3} = o$, dont l'inconnue ſera $z = \frac{fx}{m}$; & en la conſtruiſant ſelon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée BC en un point M ; duquel ayant mené ſur l'axe la perpendiculaire MQ, elle ſera la vraie racine z de cette ſeconde égalité : & faiſant enſuite $x = \frac{mz}{f}$, cette ligne x ſera la vraie racine de l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = o$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorſqu'elles ne ſont pas imaginaires ; il n'y a qu'à la

la diviſer par l'inconnue x moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaiſſer à une du ſecond degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en ſe ſervant de l'article 380.

Tout ceci eſt trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai ſeulement que ſi la portion donnée BD étoit d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole, il faudroit ſe ſervir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté ſe réduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données: & c'eſt ce que l'on feroit comme dans la Parabole.

LIVRE DIXIEME.

Des Problêmes déterminés.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

425. UN *Problême de Géométrie déterminé étant proposé, en trouver la ſolution.*

On regardera d'abord le Problême propoſé comme s'il étoit réſolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'eſt que ſuppoſé. On nommera enſuite toutes ces lignes (qui ſont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou ſemblables) par des lettres de l'Alphabet, ſçavoir les lignes qui ſont connues par les premieres lettres, & les lignes inconnues par les dernieres lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problême, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus ſimple & le plus naturel qu'il ſera poſſible: ce qui doit ſervir à former autant de différentes égalités qu'il y a d'inconnues. On employera enfin les regles ordinaires de l'Algébre pour réduire ces différentes égalités à une ſeule dans laquelle il ne ſe trouve plus qu'une inconnue, & pour l'abaiſſer s'il ſe peut à un moindre degré; & l'ayant réſolue par les regles preſcrites dans le Livre précédent, on en tirera la ſolution cherchée du Problême. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

FIG. 240. 426. LA ligne droite AB étant donnée, trouver hors de cette ligne le point C tel qu'ayant mené les droites AC, CB; 1°. La ſomme de leurs quarrés ſoit au triangle ACB en la raiſon donnée de f à g, 2°. L'angle ACB qu'elles comprennent ſoit égal à l'angle donné GDK.

Digitized by Google

Je ſuppoſe que le point C ſoit celui qu'on cherche, & je mene CH perpendiculaire ſur AB que je diviſe par le milieu au point E. Je nomme la donnée AE ou EB, a; & les inconnues EH, x; HC, y; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cauſe des triangles rectangles AHC, BHC, les quarrés des hypothénuſes $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par conſéquent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puiſque le triangle $ACB = AE \times CH\ (ay)$, il s'enſuit par la premiere condition du Problême que $2aa + 2xx + 2yy.\ ay :: f.\ g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g}y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reſte maintenant à accomplir la ſeconde condition, ſçavoir que l'angle ACB ſoit égal à l'angle donné GDK. Pour y réuſſir, je mene d'un point G pris à diſcrétion dans la droite GD, la perpendiculaire GF ſur le côté DK, prolongée, s'il eſt néceſſaire, & du point A la perpendiculaire AL ſur le côté BC prolongé auſſi, s'il eſt néceſſaire, afin d'avoir deux triangles rectangles ſemblables ACL, GDF, dont l'un GDF eſt donné. Cela fait, je nomme les données DF, b; FG, c; & faiſant, pour abréger, $BC = n$, je trouve à cauſe des triangles rectangles ſemblables BCH, BAL, ces proportions $BC\ (n).\ CH\ (y) :: BA\ (2a).\ AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC\ (n).\ BH\ (a+x) :: BA\ (2a).\ BL = \frac{2aa+2ax}{n}$. Et par conſéquent CL ou $BL - BC = \frac{2aa+2ax-nn}{n}$. Donc puiſque l'angle ACL doit être égal à l'angle GDF, il faut que $CL\left(\frac{2aa+2ax-nn}{n}\right).\ AL\left(\frac{2ay}{n}\right) :: DF(b).\ FG(c)$; d'ou l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$, c'eſt à-dire, en mettant pour nn ſa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette ſeconde

équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la ſeconde condition du Problême.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnues, & que l'on a ſatisfait à toutes les conditions du Problême ; il ne faut plus que ſe ſervir des regles ordinaires de l'Algébre, pour réduire ces égalités à une ſeule qui ne renferme qu'une inconnue y ou x : & c'eſt ce qu'on peut faire en cette ſorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour ſeconde, $aac - cxx - cyy = 2aby$ ou $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$; c'eſt pourquoi ajoutant enſemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux ſeconds, je trouve $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$. Et mettant cette valeur à la place de y & ſon quarré à la place de yy dans l'une ou l'autre des équations précédentes, je trouve $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{aV\,mm - ff - aa}{m+f}$; d'où je connois que ſi mm étoit moindre que $aa + ff$ le Problême ſeroit impoſſible. En voici la conſtruction.

FIG. 241. Par le point E milieu de AB ayant tiré une perpendiculaire indéfinie ON à AB, on menera par le point A la ligne AM qui faſſe avec AB l'angle EAM égal à l'angle DGF qui eſt donné. Du point M où cette ligne rencontre la perpendiculaire ON, comme centre, & du rayon MA, on décrira un arc de cercle ACB. On prendra enſuite ſur EM prolongée du côté de M la partie $MN = m$; & ayant joint NA, on lui menera la perpendiculaire AO qui rencontre NO au point O, par lequel on tirera une parallèle à AB. Je dis que cette parallèle rencontrera l'arc de cercle ACB au point cherché C.

Car ayant mené CH perpendiculaire ſur AB, il eſt clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puiſqu'à cauſe des triangles rectangles ſemblables NEA, AEO, il vient $NE\ (m+f).\ AE\ (a) ::\ AE\ (a).\ EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à

cauſe du cercle $\overline{CM} = \overline{AM} = aa + ff$; & partant puiſque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'enſuit à cauſe du triangle rectangle MCO que $\overline{CO}$ ou $\overline{EH}$ $(xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm-aaff-a^4}{mm+2mf+ff}$. Donc, &c.

REMARQUE.

427. LORSQU'APRÈS avoir ſatisfait à toutes les queſtions d'un Problême, on eſt arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnues; il n'eſt pas néceſſaire, ſi l'on veut, de les réduire à une ſeule qui ne renferme plus qu'une inconnue, comme il eſt preſcrit dans la propoſition générale : mais l'on peut réſoudre le Problême, en conſtruiſant ſéparément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'interſection ſerviront à trouver les valeurs de ces deux inconnues. C'eſt ce qui ſe voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnues les droites EH (x), HC (y) qui font entr'elles un angle droit EHC; & où après avoir ſatisfait aux conditions requiſes, on eſt arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en ſont les lieux étant décrits ſéparément donneront par leurs interſections des points qui ſatisferont : voici comment.

Ayant décrit comme dans la premiere conſtruction l'arc de cercle ACB, on décrira du centre A, & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire EM en P. On prendra ſur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côté de l'arc ACB, & on décrira du centre Q & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc ACB en des points C qui ſatisferont.

Car à cauſe de ce dernier cercle on aura $\overline{QC}$ ou $\overline{EP}$ $(mm - aa) = \overline{QO}$ $(mm - 2my + yy)$ $\overline{OC}$ (xx), c'eſt-à-dire la premiere équation $aa + xx + yy = 2my$;

& à cauſe de l'autre cercle ACB il vient $\overline{MC}$ ou $\overline{MA}$ $(ff+aa)=\overline{MO}\,(ff+2fy+yy)+\overline{OC}\,(xx)$, c'eſt-à-dire, la ſeconde équation $aa-xx-yy=2fy$. D'où il ſuit que le point cherché C ſe doit trouver en même temps ſur ces deux cercles, c'eſt-à-dire, qu'il doit ſe confondre avec leurs points d'interſection.

Il eſt viſible qu'il y a deux différens points C qui ſatisfont à la queſtion, lorſque ces deux cercles ſe coupent en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un, lorſqu'ils ſe touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir aucun, lorſqu'ils ne ſe coupent ni ne ſe touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en réſolvant un Problême par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une conſtruction plus compoſée, que ſi étant arrivé à une ſeule égalité qui ne renferme qu'une inconnue x, on l'eût conſtruite ſelon les regles du Livre précédent. Je m'explique: qu'il faille, par exemple, réſoudre un Problême (c'eſt le troiſieme exemple qui ſera propoſé) dont les conditions ſoient renfermées dans ces deux équations $y=\frac{cd-cx}{b}$, & $\frac{bb}{ff}yy=aa+xx$; ſi l'on ſe ſervoit des lieux de ces deux équations, il eſt clair qu'il faudroit mener une ligne droite * qui ſeroit le lieu de la premiere équation, & décrire une Hyperbole * qui ſeroit le lieu de la ſeconde, pour avoir par leurs interſections les valeurs des deux inconnues x & y. Mais parce qu'en réuniſſant ces deux équations en une ſeule, on trouve l'égalité du ſecond degré $xx-\frac{2ccd}{cc+ff}x+\frac{ccdd-aaff}{cc-ff}=0$, qui ſe conſtruit en n'employant que des lignes droites & des cercles; ce ſeroit une faute conſidérable de ſe ſervir d'une Hyperbole.

* *Art.* 306.

* *Art.* 330 & 332.

EXEMPLE II.

FIG. 242. 428. LE quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener d'un de ſes angles A la ligne droite AE, enſorte que ſa partie FE compriſe entre les côtés BC, CD, oppoſés à cet angle ſoit égale à une ligne donnée b.

Je ſuppoſe que le point E pris ſur le côté DC prolongé, ſoit tel que la partie FE de la ligne AE ſoit égale à b, c'eſt-à-dire que je ſuppoſe la queſtion réſolue ; & je nomme la donnée AB ou AD ou DC ou CB, a ; l'inconnue DE, x. Cela fait, les triangles ſemblables EDA, ECF, donnent $ED(x).DA(a)::EC(x-a).CF=\frac{ax-aa}{x}$, & le triangle rectangle ECF donne $\overline{FE}^2=\overline{EC}^2+\overline{CF}^2=xx-2ax+aa+\frac{aaxx-2a^3x+a^4}{xx}$. Mais puiſque par la condition du Problême FE doit être égale à b, on aura $xx-2ax+aa+\frac{aaxx-2a^3x+a^4}{xx}=bb$, ou $x^4-2a^3x+2aaxx-bbxx-2a^3x+a^4=0$. D'où l'on voit que la réſolution de cette égalité doit fournir pour $DE(x)$, une valeur telle que menant la droite AE, ſa partie FE compriſe entre les côtés CB, DC, ſoit égale à la donnée b.

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatrieme degré, il faudroit employer pour la réſoudre une Section Conique. C'eſt pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algébre, ſi elle ne ſe peut point abaiſſer à un degré plus ſimple, & je trouve en effet que ſi l'on prend $cc=aa+bb$, elle ſera le produit des deux égalités $xx+aa-ax-cx=0$, & $xx+aa-ax+cx=0$, qui ſont chacune du ſecond degré ; de ſorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatrieme degré x^4-2ax^3, &c, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités. Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité $xx+aa-ax+cx=0$; parce que c ſurpaſſant a, la diſpoſition des ſignes me fait connoître qu'elles ſont toutes deux fauſſes : mais je trouve celles de l'autre égalité $xx+aa-ax-cx=0$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui ſuit.

Soit priſe ſur le côté AB prolongé la partie $BG=c$, & ſoit décrit du diametre AG un demi-cercle qui coupe

en E le côté DC prolongé. Je dis que ce point ſera celui qu'on cherche.

Car nommant DE, x; & menant la perpendiculaire EH, on aura $HG = a + c - x$, & par la propriété du cercle $AH \times HG\ (ax + cx - xx) = \overline{EH}\ (aa)$.

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRÈS avoir ſatisfait aux conditions d'un Problême, on arrive à une égalité compoſée qui a pluſieurs racines réelles, il eſt viſible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnue qu'on cherche : mais on doit bien remarquer que les autres peuvent auſſi ſervir à la réſolution de la queſtion, dans un ſens qui ne peut être différent de celui qu'on s'eſt imaginé que dans quelques circonſtances particulieres. Ainſi dans cet exemple la petite racine vraie $DL\ (x)$ de l'égalité $xx - ax - cx + aa = o$, donne ſur le côté DC un point L tel qu'ayant mené la droite AL qui rencontre le côté BC prolongé en K, ſa partie LK eſt égale à la donnée b. De même ſi l'on prend $Bg = c$ ſur le côté BA prolongé vers A, & qu'on décrive du diametre Ag un demi-cercle, il coupera le côté CD prolongé vers D aux points e, l, enſorte que De, & Dl ſeront les deux racines fauſſes de l'égalité $xx + cx - ax + aa = o$: & ſi l'on mene les droites Ae, Al, qui rencontrent le côté CB prolongé aux points f, k ; les droites ef, lk, ſeront encore chacune égale à la donnée b. De-là on peut voir que quoiqu'en réſolvant le Problême on n'ait eu en vue que de trouver la valeur de DE, on eſt cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs DL, De, Dl, qui ont toutes ſervi à réſoudre le Problême en quelque ſens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problême ſe peut abaiſſer à un moindre

moindre degré, il eſt à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a ſuivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive ſouvent qu'elles conduiſent à des égalités plus ſimples, & que d'ailleurs il eſt aſſez difficile d'abaiſſer des égalités compoſées. Voici deux autres manieres de réſoudre le Problême précédent qui pourront ſervir à faire comprendre cette remarque.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, je mene EG perpendiculaire ſur AE qui rencontre le côté AB prolongé en G, & je prends pour inconnues les deux droites AF & BG que je nomme y & z. Cela fait, les triangles rectangles ſemblables ABF, AEG, donnent $AB\ (a).\ AF\ (y) :: AE\ (y+b).\ AG\ (a+z)$. Et partant $yy+by = aa+az$. Or comme j'ai deux inconnues & que le Problême eſt déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je conſidere que $EG=AF\ (y)$; car menant EH perpendiculaire ſur AG, le triangle rectangle EHG eſt ſemblable au triangle rectangle ABF, & de plus égal, puiſque les côtés homologues AB, EH, ſont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cauſe du triangle rectangle AEG) cette autre égalité $aa+2az+zz=yy+2by+bb+yy=2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ ſa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la premiere égalité, il vient $aa+2az+zz=2aa+2az+bb$ qui ſe réduit à cette égalité très-ſimple $z=\sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même conſtruction que ci-deſſus. FIG. 242.

AUTRE MANIERE.

La maniere ſuivante a cela de particulier qu'elle réuſſit également ſoit que la figure $ABCD$ ſoit un quarré, ou qu'elle ſoit un rhombe. Ayant mené par le point cherché F, que je regarde comme donné, la ligne FG qui faſſe avec AF l'angle AFG égal à l'angle donné ACE, & qui rencontre au point C la diagonale AC prolongée autant qu'il eſt néceſſaire; on aura trois triangles ACE, AFG, FIG. 243.

GCF, qui ſeront ſemblables entr'eux. Car, 1°. l'angle en A étant commun aux deux triangles ACE, AFG, & les angles ACE, AFG, étant égaux par la ſuppoſition; il eſt viſible que ces deux triangles ſeront ſemblables. 2°. Le triangle ADC étant iſoſcelle, l'angle DCA ou ECG ſera égal à l'angle DAC ou ACF, & ajoûtant de part & d'autre le même angle FCE, l'angle FCG ſera égal à l'angle ACE ou AFG; & partant puiſque l'angle en G eſt commun, les deux triangles AGF, FGC, ſeront ſemblables. Cela poſé, ſoient les inconnues $CE=x$, $AG=z$, & les données $DC=a$, $FE=b$, $AC=c$; on aura (à cauſe des parallèles AD, CF,) cette proportion : $CE\,(x).\ FE\,(b)::CD\,(a).\ AF=\frac{ab}{x}$. Or à cauſe des triangles ſemblables ACE, AFG, GCF, on trouvera $AC\,(c).\ CE\,(x)::AF\left(\frac{ab}{x}\right).\ FG=\frac{ab}{c}$. Et $AG\,(z).\ FG\left(\frac{ab}{c}\right)::\frac{ab}{c}.\ CG\,(z-c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz-cz=\frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette conſtruction.

FIG. 243. Ayant mené du point A perpendiculairement ſur AC la ligne $AH=\frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu L de la diagonale AC la ligne HL, & on prendra ſur cette diagonale prolongée du côté de C la partie LG égale à LH. On décrira enſuite du centre G & du rayon GF égal à AH, un arc de cercle qui coupera le côté BC au point cherché F. Cela eſt évident; puiſque par la conſtruction $zz-cz=\frac{aabb}{cc}$, & que $GF=\frac{ab}{c}$.

EXEMPLE III.

FIG. 244. 431. TROUVER ſur une ligne droite indéfinie DE donnée de poſition, deux points D, E; deſquels ayant mené à deux points donnés O, C, hors de cette ligne, les droites DO, OE, DC, CE; l'angle DOE ſoit droit

& l'angle DCE égal à un angle donné TPS.

Suppoſons la choſe faite, je décris du diametre DE un demi-cercle qui paſſera par le point O, puiſque l'angle DOE eſt droit; & ſur la corde DE je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel paſſera par conſéquent par le point C. Du point H centre de cet arc, & des points donnés O, C, je mene ſur DE les perpendiculaires HK, OA, CB, & je nomme les données OA, a; CB, b; AB, c; les inconnues AK, x; KH, y. Cela poſé, il eſt clair par les Elémens de Géométrie, 1°. que le point K ſera le milieu de la ligne DE, & par conſéquent le centre du demi-cercle DOE. 2°. Que ſi par le ſommet P de l'angle donné TPS on mene une perpendiculaire PQ à l'un des côtés PT, l'angle QPS qu'elle fait avec l'autre côté PS, ſera égal à l'angle KEH. Or à cauſe du triangle rectangle KAO le quarré $\overline{KO}$ ou $\overline{KE} = aa + xx$, & à cauſe du triangle rectangle HKE le quarré $\overline{HE} = aa + xx + yy$: mais prolongeant HK juſqu'à ce qu'elle rencontre en R une parallèle CR à DE, on aura (à cauſe du triangle rectangle CRH) le quarré $\overline{CH} = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puiſque les lignes HE, HC, ſont rayons du même cercle, on formera par la comparaiſon de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abréger, faiſant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, ſe réduit à celle-ci; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on conſidere le chemin qu'on a ſuivi pour arriver à l'équation précédente, on verra qu'elle renferme cette condition, ſçavoir que les cercles décrits des centres K, H, & des rayons KO, HC, ſe rencontrent ſur la ligne DE dans les mêmes points D, E; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à faire que l'angle KEH ſoit égal à l'angle QPS. Pour en venir à bout.

Ayant pris ſur la ligne PQ la partie PQ égale à CB, & tiré QS parallèle au côté PT, & terminée en S par

l'autre côté PS; il eſt évident que le triangle rectangle EKH doit être ſemblable au triangle rectangle PQS, & qu'ainſi, en nommant la donnée QS, f; on aura cette proportion; $EK(\sqrt{aa+xx}).\ KH(y) :: PQ(b).\ QS(f)$; d'où l'on tire $y = \frac{f}{b}\sqrt{aa+xx} = \frac{cd-cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommenſurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve $xx - \frac{2c.d}{cc-ff}x + \frac{ccdd-aaff}{cc-ff} = o$, dont l'une des racines fournira pour $AK(x)$ une valeur telle que décrivant un cercle du centre K & du rayon KO, il coupera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

On peut trouver les racines de cette égalité, ſelon les articles 380. ou 382. (Liv. précéd.) : mais quoique les méthodes qu'on y explique ſoient très-ſimples eu égard à leur généralité, il arrive néanmoins très-ſouvent qu'en conſidérant avec attention la nature d'une queſtion particuliere, on trouve des conſtructions plus faciles. Par exemple, on peut remarquer ici, 1°. que ſi par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire FG qui rencontre en G la ligne DE donnée de poſition, on aura $AG = d$; car nommant AG, z; les triangles rectangles GAO, GBC, donneront $\overline{GO} = zz + aa$ & $\overline{GC} = zz + 2cz + cc + bb$, & comparant enſemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puiſque le point G eſt dans la perpendiculaire FG qui diviſe par le milieu la ligne OC, il vient $zz + aa = zz + 2cz + cc + bb$, d'où l'on tire $AG(z) = \frac{aa-bb-cc}{2c} = d$. 2°. Que l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ qui renferme les conditions du Problême, ſe réduit à cette proportion; $GK(d-x).\ KO(\sqrt{aa+xx}) :: QS(f).\ AB(c)$: de ſorte que ſi l'on décrit * le lieu de tous les points K tels qu'ayant mené aux deux points donnés G, O, les droites KG, KO, elles ſoient toujours entr'elles en la raiſon donnée de

* *Art.* 350.

QS à AB; ce lieu coupera la ligne DE au point cherché K. Ce qui donne la conſtruction ſuivante qui eſt très-ſimple.

Par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire FG, qui rencontre en G la ligne DE donnée de poſition, on diviſera la ligne OG au point M, enſorte que $GM. MO :: QS. AB$. Et on la prolongera du côté de G juſqu'au point N, enſorte que $GN. NO :: QS. AB$. Du diametre MN on décrira un cercle qui coupera la ligne DE en un point K, duquel point comme centre, & du rayon KO ayant décrit un cercle; ce cercle rencontrera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

Comme le cercle qui a pour diametre la ligne MN, coupe la droite DE non-ſeulement au point K, mais encore en un autre point L; il s'enſuit qu'on peut ſe ſervir du point L de même que l'on a fait du point K, pour trouver ſur la ligne DE deux autres points qui ſatisferont également, & qu'ainſi cette queſtion peut avoir deux différentes ſolutions.

Si l'angle DCE devoit être droit auſſi-bien que l'angle DOE, il eſt clair que QS (f) deviendroit nulle, & qu'ainſi l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ ſe changeroit en celle-ci $cd - cx = o$, d'où l'on tire $x = d$; c'eſt-à-dire que le centre K tomberoit alors ſur le point G. Et ſi le point B tomboit ſur le point A, l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ ſe changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx} = \frac{aa-bb}{2}$, en mettant pour cd ſa valeur $\frac{aa-bb-cc}{2}$, & effaçant enſuite les termes où c (qui devient en ce cas nul) ſe rencontre; d'où l'on voit que dans ce cas, ſi du point O comme centre, & du rayon $OK = \frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K. Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre ſecond, & la conſtruction générale peut ſervir à trouver tout d'un coup dans une Ellipſe dont

deux diametres conjugués ſont donnés, deux autres diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle donné; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

FIG. 245. 432. TROIS points A, B, C, étant donnés, en trouver un quatrieme M, duquel ayant mené à ces points les droites MA; MB, MC; les différences de l'une d'elles aux deux autres ſoient données.

Cette queſtion eſt ſuſceptible de trois différens cas. Car ou les trois lignes MA, MB, MC, ſont toutes égales entr'elles; ou il y en a ſeulement deux qui ſoient égales entr'elles; ou enfin toutes les trois ſont inégales entr'elles.

Premier cas. Lorſque les trois lignes MA, MB, MC, ſont égales entr'elles; ou ce qui eſt la même choſe lorſque les deux différences données ſont nulles; il eſt clair que le point cherché M ſera le centre du cercle qui paſſe par les trois points donnés A, B, C.

FIG. 246. *Second cas.* Lorſque deux des trois lignes MA, MB, MC, comme MA, MB, doivent être égales entr'elles; ou (ce qui eſt la même choſe) lorſqu'une des différences données eſt nulle.

Ayant tiré du point donné C, la perpendiculaire CO ſur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B; du point M que l'on ſuppoſe être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ, parallèles à CO, OB; il eſt clair que AP ſera égale à PB, puiſque AM doit être égale à MB. Nommant donc les données AP ou PB, a; OP, b; OC, c; $AM-MC, f$; & les inconnues AM, z; PM, y; les triangles rectangles APM, MQC, donneront ces deux égalités $zz = aa + yy$, & $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la ſeconde de ceux de la premiere, il vient $2fz - ff = aa - cc + 2cy - bb$, qui ſe réduit à cette proportion $z. y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c} :: c. f.$ De-là on tire la conſtruction ſuivante.

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB, la perpendiculaire $PD = \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothénuse AD prolongée du côté qu'il sera nécessaire, aux points E, F; ensorte que $AE. ED :: c. f$, & $AF. FD :: c. f$. Du diametre EF soit décrit un cercle; il coupera la ligne PD au point cherché M.

Car ayant mené la droite MA, il est clair par la propriété du cercle EMF, * que $AM\ (z). MD \left(y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}\right) :: c. f$; & par la propriété de la perpendiculaire PM, que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problême, il s'ensuit, &c. * Art. 350.

Si par l'autre point N, où la ligne DP rencontre la circonférence, on mene les droites NA, NB, NC; les deux NA, NB, seront égales entr'elles, & la différence de chacune de ces deux droites à la troisieme NC sera égale à la donnée f; de sorte que le point N satisfait aussi, mais avec cette différence que NC est la plus grande des trois droites NA, NB, NC, au lieu que MC est la plus petite des trois MA, MB, MC.

On peut encore résoudre ce second cas sans aucun calcul. Je suppose comme auparavant que M soit le point cherché, & ayant tiré les droites MA, MB, MC, je décris du centre C, & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEKFH$. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mene aux deux points donnés A, B, les droites DA, DB qui rencontre le cercle aux points E, F; par où je tire les rayons EC, CF, & la corde EF. Cela fait, puisque $MC + CD$ ou $MD = MA$, & que les lignes CD, CE, sont rayons d'un même cercle, les triangles DMA, DCE, seront isoscelles, & par conséquent semblables parce que l'angle en D est commun : c'est pourquoi les lignes CE, MA, seront parallèles. On prouvera de même que les lignes CF, MB, seront aussi parallèles; ce qui donne $DA. DE :: DM. DC :: DB. DF$. Et de-là on voit que toute la difficulté FIG. 147.

ſe réduit à trouver ſur la circonférence du cercle $DEKFH$, le point D tel qu'ayant mené les droites DA, DB, qui rencontrent la circonférence aux points E, F; la corde EF ſoit parallèle à la ligne AB. Or cela ſe peut faire ainſi.

Ayant décrit du point C un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré AC qui rencontre ce cercle aux points K, H; on prendra ſur AB la partie AG quatrieme proportionnelle à AB, AH, AK; & on menera du point G la tangente GE au cercle $EDHFK$. Ayant mené par le point touchant E la ligne AE qui rencontre le cercle au point D, on tirera DC, ſur laquelle on prendra le point M tel que $DM. DC :: DA. DE$. Je dis qu'il ſera celui qu'on cherche.

Car par la propriété du cercle $DEKFH$ le rectangle $HA \times AK = DA \times AE$; & par conſéquent $BA. AD :: AE. AG$: c'eſt pourquoi les triangles DAB, GAE, qui ont l'angle en A commun, & les côtés autour de cet angle réciproquement proportionnels, ſeront ſemblables. L'angle AEG ſera donc égal à l'angle ABD; mais cet angle AEG étant fait par la tangente EG & par la corde DE prolongée du côté de E, a pour meſure la moitié de l'arc DE. Il ſera donc égal (en tirant par le point F où la ligne DB rencontre la circonférence, la corde EF) à l'angle DFE; & par conſéquent les lignes FE, AB, ſeront parallèles entr'elles. Or par la conſtruction $DC. DM :: DE. EA :: DF. FB$. Les triangles DMA, DMB, ſeront donc iſoſcelles; puiſque les triangles DCE, DCF, qui leur ſont ſemblables ſont iſoſcelles. Les lignes AM, MB, ſeront donc égales chacune à DM, & par conſéquent entr'elles; & de plus AM ou DM ſurpaſſera MC de la grandeur donnée CD. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

FIG. 248. *Troiſieme cas.* Lorſque les trois lignes MA, MB, MC, ſont inégales entr'elles. Du point donné C, je mene la perpendiculaire CO ſur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés; & du point M, que je ſuppoſe

ſuppoſe être celui qu'on demande, les perpendiculaires MP, MQ, ſur les lignes AB, CO. Je nomme les données AO, a; OB, b; CO, c; $AM—MB, d$; $AM—MC, f$; & les inconnues OP, x; PM, y; AM, z: ce qui donne $AP=a+x$, $BP=b—x$, $CQ=c—y$, $BM=z—d$, $CM=z—f$. Par le moyen des triangles rectangles APM, BPM, CQM, je trouve les trois équations ſuivantes; la premiere, $zz=aa+2ax+xx+yy$; la deuxieme, $zz—2dz+dd=bb—2bx+xx+yy$; la troiſieme, $zz—2fz+ff=cc—2cy+yy+xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernieres de ceux de la premiere, je forme une quatrieme, & une cinquieme équation; ſçavoir la quatrieme, $2dz—dd=aa—bb+2ax+2bx$, & la cinquieme, $2fz—ff=aa—cc+2ax+2cy$. Je mets dans la premiere équation à la place de yy le quarré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquieme; & enſuite à la place de x ſa valeur trouvée par le moyen de la quatrieme, & à la place de xx le quarré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnues que la ſeule z qui ne monte qu'au quarré. C'eſt pourquoi on la pourra toujours réſoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enſeigné dans les articles 380, ou 382 (Liv. précéd.). Or ayant la valeur de l'inconnue z, il eſt facile de trouver le point cherché M; car il ſera dans l'interſection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point A, & pour rayon la ligne AM (z); & l'autre pour centre le point B, & pour rayon la ligne BM ($z—d$).

On voit aſſez qu'en achevant le calcul, on ſeroit arrivé à une égalité du deuxieme degré qui auroit renfermé dans ſes termes des quantités très-compoſées; de ſorte que pour les réunir ſous des expreſſions ſimples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit beſoin d'un grand nombre d'opérations; ce qui rendroit la conſtruction très-longue. C'eſt pourquoi on ſe ſervira de celle-ci par le moyen de laquelle on réduit ce cas au précédent.

FIG. 249. Les deux droites AB, AC, qui joignent les points donnés étant diviſées par le milieu aux deux points D, F, & ayant mené du point M que je ſuppoſe être celui qu'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ, ſur ces deux lignes; on nommera les données AB, $2a$; BC, $2b$; $AM-MB$, $2c$; $AM-MC$, $2d$; & les inconnues DP, x; FQ, y. Cela poſé, ſi l'on nomme $2t$ la ſomme inconnue des deux droites AM, BM; la plus grande AM ſera $t+c$ & la moindre BM ſera $t-c$. Or les triangles rectangles APM, BPM, donnent $\overline{PM}=\overline{AM}-\overline{AP}=\overline{BM}-\overline{BP}$ c'eſt-à-dire en termes analytiques $tt+2ct+cc-aa-2ax-xx=tt-2ct+cc-aa+2ax-xx$, d'où l'on tire $t=\frac{ax}{c}$; & par conſéquent $AM\,(t+c)=\frac{ax}{c}+c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM, que $AM=\frac{by}{d}+d$; ce qui, en comparant enſemble les deux valeurs de AM, donne cette équation $\frac{ax}{c}+c=\frac{by}{d}+d$, ou $\frac{ax}{c}=\frac{by}{d}+d-c=\frac{by}{d}+f$, en faiſant pour abréger $d-c=f$. D'où il eſt clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ, ſur les deux droites AB, AC; on ait cette équation $\frac{ax}{c}=\frac{by}{d}+f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x.\ y+\frac{df}{b}::b.\frac{ad}{c}$. Or cela ſuffit pour trouver la conſtruction ſuivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC, & diviſé ces droites par le milieu aux points D, F; on prendra ſur AC du côté du point A la partie $FK=\frac{df}{b}$; & ayant tiré ſur AB, AC, les perpendiculaires DO, KS, qui ſe rencontrent au point H, on menera dans l'angle OHS la droite HM qui ſoit le lieu des points M, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux

les perpendiculaires MO, MR, ſur les côtés HO, HS; la droite MO ſoit toujours à la droite MR, en la raiſon donnée de b à $\frac{ad}{c}$. Enſuite l'on tirera AE perpendiculaire ſur HM, & l'ayant prolongée en G enſorte que EG ſoit égale à AE, on trouvera par le ſecond cas le point M, tel qu'ayant mené les droites MA, MG, MC; les deux MA, MG, ſoient égales entr'elles, & la différence de MA à MC ſoit la donnée $2d$. Je dis qu'il ſatisfera à la queſtion.

Car par la propriété de la droite HM, on aura toujours MO ou $DP(x)$. MR ou $QK\left(y+\frac{df}{b}\right) :: b.\frac{df}{b}$; & par conſéquent le point M ſe doit trouver dans cette ligne. Il ſera donc également éloigné des points A, G; mais de plus la différence de AM à MC doit être la donnée $2d$. Donc, &c.

REMARQUE.

433. SI au lieu que dans cet exemple, les deux différences de l'une de ces trois droites MA, MB, MC, aux deux autres ſont données; on vouloit à préſent que ce fuſſent les deux ſommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la ſomme de l'une d'elles avec une autre & la différence de la même avec la troiſieme: la queſtion n'en deviendroit pas plus difficile, & on pourroit toujours la réſoudre par les mêmes méthodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laiſſer quelque choſe à l'induſtrie des Lecteurs.

COROLLAIRE I.

434. DE-LA on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car ſoient les points A, B, C, les centres des cercles donnés, & le point M celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points D, E, F, du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons Fig. 250.

des cercles donnés $AD=a$, $BE=b$, $CF=c$; & le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou $MF=z$. Cela posé, on aura $AM=z+a$, $MB=z+b$, $MC=z-c$; & partant $AM-MB=a-b$, $MB-MC=b+c$, $AM-MC=a+c$. D'où il est évident que la question se réduit à trouver un point M, duquel ayant mené aux trois points donnés A, B, C, les droites MA, MB, MC, leurs différences soient données.

COROLLAIRE II.

FIG. 251. 252. 435. DE-LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, qui passe par deux autres points donnés B, C, & qui touche une ligne droite DE donnée de position.

On doit distinguer ici deux différens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés F, B, C, tombent du même côté de la droite indéfinie DE; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251. *Premier cas.* Ayant mené FD perpendiculaire sur DE, & l'ayant prolongée en A enforte que DA soit égale à DF; on tirera les droites FB, FC. On trouvera le point M tel que la différence de AM & BM soit egale à FB, & celle de AM & MC égale à FC. On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points F, M, & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à AM. Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* *Déf.* 1. II. & 1. III.

Car, 1°. le point E où la ligne AM rencontre la droite DE est à la Section, puisque FE étant égale à AE, on aura dans l'Ellipse la somme des droites FE, EM, & dans l'Hyperbole la différence égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points B, C, seront aussi dans la Section. 2°. Par la construction les angles FED, DEA, sont égaux entr'eux; & par conséquent la ligne ED est * tangente en E.

* *Art.* 60 & 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer M du même côté du foyer donné F par rapport à la ligne DE, la Section qu'on trouve eſt une Ellipſe ; au lieu qu'elle ſera une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées, lorſqu'on le cherchera de l'autre côté.

Second cas. Il eſt évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipſe qui ſatisfaſſe, mais ſeulement deux Hyperboles oppoſées. Pour les trouver ; ayant mené comme dans le premier cas FD perpendiculaire ſur DE, & l'ayant prolongée en A enſorte que DA ſoit égale à DF ; on cherchera le point M tel que la ſomme de AM & BM ſoit égale à la donnée FB, & la différence de AM & MC ſoit égale à la donnée FC. On décrira enfin deux Hyperboles oppoſées qui ayent pour foyers les deux points F, M, & dont le premier axe ſoit égal à AM. Je dis qu'elles ont les conditions requiſes. FIG. 252.

Car, 1°. le point E, où la ligne AM rencontre la ligne DE, ſera à l'une de ces deux Hyperboles, puiſque FE étant égale à AE, la différence des droites FE, ME, ſera égale à AM valeur du premier axe ; & par la même raiſon les points B, C, ſeront à ces Hyperboles. 2°. La ligne DE ſera * tangente en E, puiſque par la conſtruction les angles AED, DEF, ſont égaux entr'eux. * *Art.* 123.

Si le point C tomboit du même côté du point B par rapport à la ligne DE, la ſomme des deux droites AM & MC ſeroit égale à la donnée FC ; au lieu que c'eſt la différence lorſque les points B, C, tombent de part & d'autre de la ligne DE, comme l'on a ſuppoſé dans cette figure.

Si l'on propoſoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de poſition, & qui paſsât par un autre point donné ; on tronveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point A, deſquels ayant mené deux droites qui aboutiſſent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur différence ou leur ſomme avec celle qui part du

point où doit paſſer la Section & qui aboutit au même foyer, ſera toujours donnée : de ſorte qu'on pourra toujours réſoudre la queſtion par le moyen de l'Exemple précédent, & de ſa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de poſition, & qui eût pour foyer un point donné ; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points comme l'on a fait le point A par le moyen de la ligne DE dans les deux cas précédens, & le centre du cercle qui paſſeroit par ces trois points, ſeroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit obſerver dans tous ces différens cas, que ſi le point cherché M étoit infiniment éloigné du point F; la Section deviendroit alors une Parabole dont les diametres ſeroient parallèles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

EXEMPLE V.

FIG. 253. 436. UNE Parabole NCS étant donnée avec un de ſes arcs MN; trouver un autre arc RS qui ſoit à l'arc MN, en raiſon donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de ſon origine C juſques en A, enſorte que CA ſoit égal à la moitié de ſon parametre, & décrit une Hyperbole équilatere EAF qui ait pour centre le point C & pour la moitié de ſon premier axe la ligne CA; on menera parallèlement à l'axe CA les droites MB, NE, RD, SF, qui rencontrent le ſecond axe aux points H, L, K, O, & l'Hyperbole aux points B, E, D, F, deſquels on tirera ſur les Aſymptotes les perpendiculaires BP, EQ, DG, FI. Cela fait, il eſt viſible que le rectangle $AC \times MN$ ou * le Trapéſe hyperbolique $HBEL$ eſt égal au Secteur hyperbolique CBE plus le triangle CLE moins le triangle CHB; & de même que $AC \times RS = CDF + COF - CKD$. Or ſuppoſant que la raiſon donnée de l'arc

* *Art.* 246.

MN à l'arc RS ſoit comme m eſt à n, les lettres m & n expliquent des nombres entiers quelconques) on aura par la condition du Problême $AC \times MN$ ou $CBE + CLE - CHB$. $AC \times RS$ ou $CDF + COF - CKD :: m. n$, & par conſéquent $nCBE + nCCLE - nCHB = mCDF + mCOF - mCKD$. Si donc l'on nomme les données CP, b; CQ, c; l'inconnue CG, x; & qu'on prenne $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il eſt clair * que le Secteur hyperbolique CBE. $CDF :: m. n$, & qu'ainſi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité précédente ſe change en celle-ci $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ qui ne renferme plus d'eſpaces hyperboliques, mais ſeulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques. * *Art.* 223.

Les droites CP, HB, forment en s'entrecoupant au point N deux triangles rectangles VHC, VPB, qui ſont ſemblables; puiſque les angles en V étant oppoſés au ſommet ſont égaux; ce qui donne $HV. CV :: VP. VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV \times VB = CV \times VP$. De plus à cauſe de l'Hyperbole équilatere EAF, l'angle VCA ou CVH * eſt demi droit, & par conſéquent le triangle rectangle CHV eſt iſoſcelle, auſſi-bien que ſon ſemblable VPB, ce qui donne $VP = PB$, $CH = HV$, & $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2\overline{HV}^2$. Donc le quadruple du triangle rectangle CHB, c'eſt-à-dire $2CH \times HB = 2HV \times \overline{HV + VB} = 2\overline{HV}^2 + 2HV \times VB = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, puiſque $\overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2$ eſt le quarré de $CV + VP$ ou de CP. Et par conſéquent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}\overline{PB}^2$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ}^2 - \frac{1}{4}\overline{QE}^2$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG}^2 - \frac{1}{4}\overline{GD}^2$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI}^2 - \frac{1}{4}\overline{IF}^2$. C'eſt pourquoi nommant aa la puiſſance de l'Hyperbole, * *Déf.* 16. III.

on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^4}{4bb}$, le triangle $CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$, le triangle $COF = \frac{xx}{4}\sqrt[m]{\frac{c^m}{b^m}} - \frac{a^4}{4xx}\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}}$; puiſque * $PB = \frac{aa}{b}$, $QE = \frac{aa}{c}$, $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}}$: & mettant ces valeurs à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera celle-ci $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4}m \times xx\sqrt[m]{\frac{c^m}{b^m}} - \frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}} - xx + \frac{a^4}{4xx}$ qui ſe réduit, en opérant ſelon les regles ordinaires de l'Algébre, à cette égalité du deuxieme degré $x^4 - \frac{na^4 - nbbcc \times cc - bb \times \sqrt[m]{b^m}}{mbbcc \times \sqrt[m]{c^m} - \sqrt[m]{b^m}}xx + a^4\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}} = o$, dont la réſolution doit fournir pour CG (x) une valeur telle qu'en prenant $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^m}{b^m}}$, & tirant les perpendiculaires GD, IF, qui rencontrent l'Hyperbole équilatere aux points D, F; l'arc RS que les parallèles DR, FS à l'axe coupent ſur la Parabole, ſera à l'arc MN en la raiſon donnée de n à m.

* *Art.* 101.

Il eſt à propos de remarquer, 1°. que le ſecond terme de cette égalité eſt toujours négatif, parce que CQ (c) ſurpaſſe CP (b); & qu'ainſi ces deux racines ſeront toutes deux vraies ou toutes deux imaginaires, ſelon que la moitié de la grandeur connue au ſecond terme eſt plus grande ou moindre que $aa\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}}$ racine quarrée du dernier terme: ce qui eſt une ſuite de la réſolution des égalités du ſecond degré. 2°. Que $\overline{CG}$ (xx) étant une des racines de cette égalité, $\overline{IF}$ en ſera l'autre. Car puiſque $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^m}{b^m}}$, il s'enſuit * que $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}}$. Or on ſçait que le dernier terme d'une égalité, eſt le produit de ſes racines. Si donc on diviſe le dernier terme $a^4\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}}$ de l'égalité

* *Art.* 101.

l'égalité précédente, par le quarré $\overline{CG}^2$ (xx) que l'on ſuppoſe être l'une de ſes deux racines ; l'autre ſera $\frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ qui eſt le quarré de FI. D'où l'on voit que ſi l'on prend ſur les deux Aſymptotes les parties CG, CT, égales aux deux racines de l'égalité précédente ; & qu'ayant tiré les parallèles GD, TF, aux Aſymptotes, on mene par le point D, F, où elles rencontrent l'hyperbole équilatere EAF, les parallèles DR, FS, à l'axe : elles couperont ſur la Parabole l'arc cherché RS.

Si $m=n$, l'équation générale ſe changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc-a^4}{cc}xx + \frac{a^4bb}{cc} = o$, dont les deux racines fourniſſent $CG\,(x) = b = CP$, & $CT\,(x) = \frac{aa}{c} = QE$; d'où il ſuit qu'on trouve par leur moyen un arc RS, ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc MN. Or comme l'on ſçait d'ailleurs * que les deux arcs RS, MN, étant ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe ſont égaux entr'eux, cela ſert à confirmer les raiſonnemens que l'on vient de faire. De-là il eſt aiſé de conclure qu'un arc parabolique MN étant donné, on n'en peut trouver aucun autre RS qui ſoit plus proche ou plus éloigné de l'origine C de l'axe & qui lui ſoit égal ; ſans ſuppoſer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique.

* *Art.* 86.

Si $m=1$ & $n=2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4bb-2ccb^4}{c^4+bbcc}xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = o$; & ſi $m=2$ & $n=3$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'arc RS doit être à l'arc MN comme 3 eſt à 2, on trouvera $x^4 - \frac{3a^4-3bbcc\times\overline{bcc-b^3}}{2c^3-2ccb^3}xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = o$; & la réſolution de ces égalités fournira celle du Problême. Il en eſt de même des autres valeurs de m & n.

M. *Bernoulli* célebre Profeſſeur des Mathématiques à Groningue, a réſolu le premier ce Problême d'une maniere différente de celle-ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1698. p. 261.

EXEMPLE VI.

FIG. 254. 437. UN angle BAC étant donné avec un point D au dedans de cet angle ; décrire un cercle qui paſſe par le point donné D, qui touche le côté AB en quelque point P, & qui coupe ſur l'autre côté AC une partie OC égale à une ligne donnée $2a$.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu, on menera du point donné D, la ligne DA qui paſſe par le ſommet A de l'angle donné, la ligne DP qui paſſe par le point touchant P & rencontre en H le côté AC prolongé, la ligne DE parallèle à AC, & la perpendiculaire DB ſur le côté AB : & ayant diviſé la partie interceptée OC $(2a)$ par le milieu en Q, on nommera les inconnues AP, x ; AQ, z ; DH, t ; & les données AE, m ; AB, g ; BD, b ; DE, f ; AD, n. Cela fait, on aura par la propriété du cercle, $\overline{AP}^{2}\,(xx) = CA \times AO$ ou $\overline{AQ}^{2}\,(zz) - \overline{QO}^{2}\,(aa)$, & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles ſemblables PED, PAH, donnent $AE\,(m).\ AP\,(x) ::\ DH\,(t).\ HP = \frac{tx}{m}$. Et $PE\,(m-x).\ ED\,(f) ::\ AP\,(x).\ AH = \frac{fx}{m-x}$. Donc $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$ & $CH \times HO$ ou $\overline{HQ}^{2} - \overline{QO}^{2} = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{m-x^{2}} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{m-x^{2}}$ (en mettant pour zz ſa valeur $xx+aa$) $= DH \times HP\,\left(\frac{tx}{m}\right)$ par la propriété du cercle ; c'eſt-à-dire qu'en diviſant par x, on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ff}{m-x^{2}} = \frac{tt}{m}$. Or PD ou $DH - HP = \frac{mt-tx}{m}$; & (à cauſe du triangle rectangle DBP) ſon quarré $\frac{mmtt-2mttx+ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb+gg$ ſa valeur nn ; d'où l'on tire $\frac{tt}{m} = \frac{mxx-2gmx+mnn}{m-x^{2}} = x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ff}{m-x^{2}}$, & multipliant par $m-x$, &

transposant le terme $\frac{ffx}{m-x}$, il vient $mx-xx+2fz$ $=\frac{mxx-2gmx-ffx+mnn}{m-x}=\frac{mxx-mmx-nnx+mnn}{m-x}$, puisque à cause du triangle rectangle DEB on trouve $ff=bb+gg-2gm+mm=nn-2gm+mm$: c'est-à-dire, parce que la division se fait au juste, $mx-xx+2fz=-mx+nn$ ou $2fz=xx-2mx+nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour zz sa valeur $xx+aa$, on aura cette égalité

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & -4mx^3 & +4mmxx & -4mnnx & +n^4 \\ & & -4ff & & -4aaff \\ & & +2nn & & \end{array} = 0$$

qui est du quatrieme degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra, doivent fournir pour AP (x) des valeurs telles que menant PM perpendiculaire sur AP, tirant PD, & faisant l'angle PDM égal à l'angle DPM, le point M, où se rencontrent les côtés DM, PM du triangle isoscelle DPM, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite MP ou MD. Ou bien si l'on prend sur le côté AB la partie $AP=x$, & sur l'autre côté AC la partie $AQ=\sqrt{xx+aa}$, & qu'on mene sur les côtés les perpendiculaires PM, QM; le point M où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les différens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même vérité; je vais donner une autre maniere de résoudre cette question, qui me paroît encore plus naturelle que la précédente.

Ayant supposé que le point M soit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires MP, MQ, sur les côtés de l'angle donné BAC, & les parallèles MF, MG, à ces côtés; & du point donné D, on tirera les parallèles DB, DE, DK, à MP, MF, AB. On nommera ensuite les données DB, b;

BE, c; DE, f; AB, g; AE, m; AD, n; & les inconnues AP, x; PM ou MD, y; & on aura PB ou $DK = g - x$, $MK = y - b$: ce qui donne (à cauſe du triangle rectangle MKD) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ ſa valeur nn. Or à cauſe des triangles ſemblables DBE, MPF, on a cette proportion $DB(b).\ BE(c) :: PM(y).\ PF = \frac{cy}{b}$, & partant AF ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cauſe des triangles ſemblables DBE, MQG, $DE(f).\ DB(b) :: MG\left(\frac{bx - cy}{b}\right).\ MQ = \frac{bx - cy}{f}$; donc puiſque par les conditions du Problême, il faut que QC moitié de la partie interceptée OC ſoit égale à la ligne donnée a, & que les droites MC & MP ſoient rayons d'un même cercle cherché; il vient $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = \overline{MP}^2\ (yy)$, & multipliant par ff on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour ff ſa valeur $bb + cc$, c'eſt-à-dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ ſa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + nn}{2}$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin ſi l'on met pour $g - c$ ſa valeur m, on trouvera la même égalité que ci-deſſus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

Voici encore une nouvelle maniere de réſoudre cette queſtion, qui donne d'abord une conſtruction fort aiſée; mais qui demande la deſcription de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné D une ligne droite MD, & ſur la ligne AB donnée de poſition la perpendiculaire MP; ces deux lignes MD, MP, ſoient toujours égales entr'elles : & je vois ſans aucun calcul que c'eſt *

* *Art.* 1.

la Parabole qui a pour foyer le point D, & pour directrice la ligne AB. 2°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui paſſe par le point donné D; ce cercle coupe ſur la ligne AL donnée de poſition, la partie OC égale à une ligne donnée $2a$. Je mene à cet effet du point donné D la perpendiculaire DL ſur AL, & d'un des points cherchés M que je regarde comme donné, les perpendilaires MR, MQ, ſur DL, AL: & ayant nommé les inconnues & indéterminées DR, x; RM, y; qui font entr'elles un angle droit DRM, & la connue DL, b; j'ai à cauſe du triangle rectangle MRD le quarré $\overline{MD} = xx + yy$, & à cauſe du triangle rectangle MQC le quarré $\overline{MC} = \overline{MQ}\ (bb - 2bx + xx) + \overline{QC}\ (aa)$. Or les lignes MD, MC, étant rayons du même cercle ſont égales entr'elles, & par conſéquent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on conſtruit la Parabole qui eſt le lieu de cette équation, il eſt viſible qu'elle paſſera par le centre M du cercle qu'on demande: mais la Parabole qui a pour foyer le point D & pour directrice la ligne AB devant auſſi paſſer par ce centre, il s'enſuit que le centre du cercle cherché ſe trouvera dans l'interſection de ces deux Paraboles.

EXEMPLE VII.

438. UN cercle qui a pour centre le point A & pour rayon la droite AM, étant donné, avec deux points E, F, ſur le même plan; trouver ſur la circonférence au dedans de l'angle EAF, le point M tel qu'ayant mené les droites AM, EM, FM; les deux angles AME, AMF, ſoient égaux entr'eux. FIG. 255.

Si les lignes AE, AF, étoient égales entr'elles, il eſt viſible que la ligne qui diviſeroit par le milieu l'angle EAF, couperoit la circonférence dans le point qu'on demande. C'eſt pourquoi on ſuppoſera que ces deux lignes ſont inégales, & même pour éviter la confuſion

que c'eſt la ligne AE qui eſt moindre que la ligne AF. Or cela poſé, je réſouds ce Problême en deux différentes manieres.

PREMIERE MANIERE.

Ayant ſuppoſé que le point M ſoit celui qu'on cherche, on menera les droites MB, MD, qui faſſent ſur AF, AE, des angles MBA, MDA, égaux aux angles AMF, AME, & par conſéquent entr'eux; & à cauſe des triangles ſemblables AFM, AMB, & AEM, AMD, on aura ces deux proportions $AF.AM::AM.AB$. Et $AE.AM::AM.AD$. Donc puiſque les lignes AF, AE, ſont données avec le rayon AM, les parties AB, AD, des droites AF, AE, le ſeront auſſi. Maintenant, ſi l'on mene les droites MP, MQ, parallèles à AE, AF; les triangles BPM, DQM ſeront ſemblables, puiſque les angles APM, AQM, ſont égaux, comme auſſi les angles PBM, QDM, complémens à deux droits des angles égaux, MBA, MDA; & partant ſi l'on nomme les données AB, a; AD, b; & les inconnues AP ou QM, x; PM ou AQ, y; on aura $BP(x-a).PM(y)::DQ(y-b).QM(x)::$ ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation $xx-ax=yy-by$, ou $yy-by-xx+ax=o$, dont le lieu eſt * une Hyperbole équilatere qui ſe conſtruit ainſi.

* *Art.* 336.

Soient priſes ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiemes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM: ſoit tirée par le point C milieu de BD une ligne droite indéfinie CH parallèle à AB, ſur laquelle ſoit priſe la partie $CK=\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ (la ligne AD (b) ſera plus grande que BA (a), puiſqu'on a ſuppoſé que AE eſt moindre que AF): ſoit décrite une Hyperbole équilatere qui ait pour centre le point C, & pour la moitié d'un ſecond diametre la droite CK, dont les ordonnées HM ſoient parallèles à AD. Je dis qu'elle rencontrera la circonférence du cercle donné, au point cherché M.

Car menant CL parallèle à AD, il eſt clair que les

lignes CH, CL, diviſeront par le milieu les droites AD, AB, aux points O, L; puiſque le point C coupe en deux parties égales la ligne BD, & qu'ainſi CH ou $AP-AL=x-\frac{1}{2}a$, HM ou $PM-AO=y-\frac{1}{2}b$. Or par la propriété de l'Hyperbole équilatere, $\overline{HM}=\overline{CH}+\overline{CK}$, c'eſt-à-dire en termes analytiques $yy-by+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy-by=xx-ax$, qui étant réduite en proportion, donne $BP\,(x-a).\,PM\,(y)::DQ\,(y-b).\,QM\,(x)$. Donc puiſque les angles BPM, DQM, ſont égaux, & que les côtés autour de ces angles ſont proportionnels; les triangles BPM, DQM, ſeront ſemblables, & par conſéquent l'angle MBP ſera égal à l'angle MDQ, & leurs complémens à deux droits ABM, ADM, ſeront égaux. Mais puiſque $AB.\,AM::AM.\,AF$, & $AD.\,AM::AM.\,AE$, les triangles ABM, AMF, & ADM, AME, ſeront ſemblables. L'angle ABM ſera donc égal à l'angle AMF, & l'angle ADM à l'angle AME; & par conſéquent les angles AMF, AME, ſeront égaux entr'eux, puiſqu'on vient de prouver que les angles ABM, ADM, le ſont.

On prouvera de même que l'Hyperbole oppoſée à celle-ci coupera la circonférence au dedans de l'angle oppoſé au ſommet à l'angle EAF, en un point M tel qu'ayant mené les droites AM, ME, MF; les angles AME, AMF, ſeront égaux entr'eux : comme auſſi que ces deux Hyperboles équilateres oppoſées couperont la circonférence au dedans des angles qui ſont à côté de ces deux-ci, chacune en un point M tel qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; l'angle AME ſera égal au complément à deux droits de l'angle AMF.

Si l'on prend ſur CL la partie CG égal à CK, il eſt clair * que CG ſera la moitié du premier diametre conjugué à CK, & qu'ainſi * l'une des Aſymptotes de ces deux Hyperboles ſera parallèle à KG. Or dans le triangle iſoſcelle GCK, l'angle externe GCO ou ſon égal BAD vaut les deux internes oppoſés, c'eſt-à-dire le dou-

* *Déf.* 16. III.
* *Art.* 114.

ble de l'angle CGK. Donc puiſque les lignes CG, AD, ſont parallèles, il s'enſuit que la ligne KG & par conſéquent l'une des Aſymptotes ſera parallèle à la ligne qui diviſe par le milieu l'angle DAB. De plus il eſt évident que la ligne AD eſt une double ordonnée au ſecond diametre CK, puiſque $\overline{OD}$ ou $\overline{OA}\,(\frac{1}{4}bb) = \overline{CO}\,(\frac{1}{4}aa) + \overline{CK}\,(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa)$; & qu'ainſi l'une des Hyperboles équilateres oppoſées paſſe par le point D, & l'autre par le point A. Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle conſtruction qui eſt plus ſimple que la précédente: la voici.

FIG. 256. Ayant pris ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiemes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera par le point de milieu C de la ligne BD deux droites indéfinies CH, CK, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la ligne AP, qui diviſe par le milieu l'angle donné EAF. On décrira enſuite entre ces deux lignes comme Aſymptotes, par les points D, A, deux Hyperboles oppoſées, qui couperont la circonférence du cercle donné en des points M tels qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; les deux angles AME, AMF, ſeront égaux entr'eux lorſque le point d'interſection M tombe dans l'angle EAF ou dans ſon oppoſé au ſommet; & l'angle AME ſera égal au complément à deux droits de l'angle AMF lorſqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'eſt arrivé à cette derniere conſtruction qu'en ſuppoſant la premiere qui eſt fondée ſur le calcul, & en faiſant enſuite des remarques qui ſont aſſez recherchées. Il eſt cependant facile de la démontrer tout d'un coup, ſi l'on fait attention à une propriété de l'Hyperbole équilatere qui ſe trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs ſe peut aiſément prouver. Car ſi l'on mene du point M où l'Hyperbole équilatere DM rencontre la circonférence du cercle donné, aux deux extrémités B, D, du premier diametre BD, les droites BM, DM,

BM, DM, qui rencontrent l'Aſymptote CH aux points O, L, & la ligne AP qui lui eſt parallèle aux points S, R; il eſt clair ſelon cet article, que MO eſt égal à ML, & qu'ainſi l'angle MOL ou MSR ou BSA eſt égal à l'angle MLO ou DRA. Mais par la conſtruction l'angle BAS eſt égal à l'angle DAR, puiſque la ligne AP diviſe par le milieu l'angle EAF. Partant les angles reſtans ABM, ADM, dans les deux triangles ABS, ADR, ſeront égaux entr'eux; d'où il ſuit que les angles AMF, AME, le ſont auſſi. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette derniere conſtruction, une égalité très-ſimple qui ne renferme qu'une ſeule inconnue, & dont la conſtruction qui ſe pourra faire par telle Section conique qu'on voudra ſuivant les regles preſcrites dans le Livre précédent, fournira la réſolution du Problême. Soit menée à cet effet du point M la ligne MP parallèle à l'Aſymptote CK, & qui rencontre l'autre Aſymptote CH au point H; & ſoient nommées les données AM, a; AK, b; CK, c; & les inconnues AP, x; PM, y. Cela poſé, on aura par la propriété du cercle l'équation $xx+yy=aa$, & par la propriété des Hyperboles oppoſées * l'autre équation $CH \times HM\,(xy-cx-by+bc) = CK \times KA\,(bc)$; ce qui donne $xy-cx-by=o$, d'où l'on tire $y=\frac{cx}{x-b}$. Mettant le quarré de cette valeur à la place de yy dans la premiere équation $xx+yy=aa$, & opérant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatrieme degré $x^4-2bx^3+bbxx+2aabx-aabb=b.+cc-aa$

* *Art.* 100.

Or ſi l'on mene du centre C des Hyperboles perpendiculairement à AC la ligne CG qui rencontre la circonférence au point G; les triangles rectangles ACG, AKC, donneront $\overline{CG} = \overline{AG} - \overline{AC} = \overline{AM}\,(aa) - \overline{AK}\,(bb) - \overline{CK}\,(cc)$. C'eſt pourquoi nommant la donnée CG, m;

on changera l'égalité précédente en celle-ci $x^4 - 2bx^3 - mmxx + 2aabx - aabb = o$, dans laquelle les données ſont le rayon AM (a), les lignes AK (b), CK (c), CG (m), & l'inconnue x exprime des valeurs de AP telles que menant les perpendiculaires PM, elles rencontreront la circonférence aux points cherchés.

Pour diſtinguer entre les deux points où chaque perpendiculaire PM coupe la circonférence du cercle, celui qui ſert à la queſtion préſente; il faut obſerver de mener PM du côté où l'on a ſuppoſé que tomboit le point M par rapport à la ligne AP en faiſant le calcul, lorſque ſa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvée ci-deſſus eſt poſitive, c'eſt-à-dire, lorſque x eſt en même tems vraie & plus grande que b, ou bien lorſqu'elle eſt fauſſe; & au contraire il la faut mener du côté oppoſé, lorſque ſa valeur eſt négative, c'eſt-à-dire, lorſque x eſt en même tems vraie & moindre que b.

SECONDE MANIERE.

FIG. 257. Ayant mené par le point cherché M que l'on regarde comme donné la droite MD perpendiculaire au rayon AM, & par le point D où elle rencontre AF la droite GH parallèle à AM, laquelle rencontre en H la ligne MF, & en G la ligne EM prolongée qui coupe en C la droite AF; on aura à cauſe des triangles ſemblables FAM, FDH, cette proportion : $AM. DH :: AF. FD$. Et à cauſe des triangles ſemblables CAM, CDG, cette autre, $AM. DG :: AC. CD$. Or la ligne DG eſt égale à DH, puiſque par la condition du Problême les angles AME, AMF, devant être égaux, les angles DMH, DMG, le ſeront auſſi. Donc $AF. FD :: AC. CD$, & $AF + FD. AF :: AC + CD$ ou $AD. AC$. Cela poſé, ſoient menées EB, MP, perpendiculaires ſur AF, & MQ perpendiculaire ſur EB: & ſoient nommées les données AM, a; AB, b; BE, c;

AF, d; & les inconnues AP, x; PM, y. les triangles rectangles ſemblables APM, AMD, donneront $AP(x).AM(a)::AM(a).AD=\frac{aa}{x}$. Et partant $FD=d-\frac{aa}{x}$; & les triangles ſemblables EQM, MPC, donneront EQ ou $EB-MP(c-y)$. QM ou $AP-AB(x-b)::MP(y).PC=\frac{xy-by}{c-y}$. Donc AC ou $AP+PC=\frac{cx-by}{c-y}$, & mettant dans la proportion précédente $AF+FD.AF::AD.AC$ à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx-aacx-2bdxy+aaby+aady=aadc$, qui ſe réduit en diviſant par $2cd$, & en faiſant (pour abréger $b+d=f$, à cette autre $xx-\frac{b}{c}yx-\frac{aa}{2d}x+\frac{aaf}{2cd}y-\frac{1}{2}aa=o$, dont le lieu qui eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes étant conſtruit ſelon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonférence du cercle au point cherché M.

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnue x, on ſe ſervira de l'équation au cercle $xx+yy=aa$, dans laquelle mettant à la place de yy le quarré de y trouvée par le moyen de l'équation précédente, on arrivera à une égalité du quatrieme degré qui ne renfermera que l'inconnue x, & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée AP.

EXEMPLE VIII.

439. UN cercle qui a pour centre le point A étant donné avec deux autres points E, F; trouver ſur la circonférence le point M tel qu'ayant mené les droites AM, MF, ME; le ſinus droit de l'angle AMF ſoit au ſinus droit de l'angle AME, en la raiſon donnée de m à n. FIG. 258.

Je réſouds cette queſtion en deux différentes manieres.

PREMIERE MANIERE.

Ayant pris sur les droites données AF, AE, les parties AB, AD, troisiemes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera du point cherché M que l'on regarde comme donné les droites MB, MD, les perpendiculaires MG, MH, sur AF, AE, & les parallèles MP, MQ, à AE, AF. Ayant pris sur BM la partie BK égale à DM, on tirera du point K les droites KO, KL, parallèles à MG, MP, & du point donné D la perpendiculaire DC sur AF. Cela fait, les triangles semblables BMG, BKO, donnent $BM.BK$ ou $DM :: MG.KO$. Or par la condition du Problême $m.n :: KO.MH$; puisque prenant DM pour rayon ou sinus total, les droites KO, MH, seront les sinus droits des angles MBF, MDE, ou de leurs complémens à deux droits MBA, MDA, égaux par la construction aux angles AMF, AME. Donc en multipliant par ordre les antécédens & les conséquens de ces deux proportions, on aura $m \times BM.n \times MD :: MG \times KO.KO \times MH :: MG.MH :: MP.MQ$. à cause des triangles semblables MPG, MQH. Cela posé.

On nommera les données AD, a; AC, b; CD, c; AB, d; AM, x; & les inconnues AP ou MQ, x; PM ou AQ, y; & les triangles semblables ADC, PMG, QMH donneront $PG = \frac{by}{a}$, $MG = \frac{cy}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, GB ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, DH ou $AQ + QH - AD = y + \frac{cx}{a} - a$: & à cause des triangles rectangles BGM, DHM, on aura $\overline{BM}$ ou $\overline{BG} + \overline{GM} = xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa} - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd + \frac{ccyy}{aa} = xx + \frac{2b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd$ en mettant pour

$bb+cc$ ſa valeur aa à cauſe du triangle rectangle ACD; & de même $\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or par la propriété du cercle, le quarré $\overline{AM}^2\,(rr) = \overline{AG}^2\left(xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa}\right) + \overline{GM}^2\left(\frac{ccyy}{aa}\right) = xx + \frac{2b}{a}xy + yy$ en mettant pour $bb+cc$ ſa valeur aa. Si donc l'on ſubſtitue dans les valeurs de $\overline{BM}^2$ & de $\overline{DM}^2$ à la place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur rr, & que pour abréger on faſſe $rr+dd=ff$ & $rr+aa=gg$, on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM = \sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Subſtituant enfin ces valeurs à la place de BM & de DM dans la proportion $m \times BM.\ n \times DM :: MP\,(y).\ MQ\,(x)$ que l'on a trouvée ci-deſſus; & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $mx\sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque membre, & faiſant évanouir l'inconnue y par le moyen de l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrivera à une égalité du ſixieme degré qui ne renfermera plus que l'inconnue x, & qui étant réſolue ſelon les regles du Livre précédent, donnera pour $AP\,(y)$ une valeur telle que menant PM parallèle à AE, le point M où cette ligne rencontrera la circonférence, ſera celui qu'on cherche.

Si l'on ſuppoſe que $m=n$, il eſt évident que les angles MBF, MDE, ſeront égaux; & qu'ainſi les angles ABM, ADM, ou AMF, AME, le ſeront auſſi. D'où l'on voit que le Problême précédent n'eſt qu'un cas particulier de celui-ci.

SECONDE MANIERE.

Ayant joint les deux points donnés E, F, par une Fig. 259.

ligne droite, on tirera du centre donné A les droites AD, AP, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle à cette ligne, & par le point cherché M que l'on regarde comme donné la parallèle PQ à AD, on menera auſſi du même point M, le rayon AM qui rencontre EF en O, & les droites EM, FM, ſur leſquelles on abaiſſera des points O, F, E, les perpendiculaires OG, OH, & FC, EB. Cela fait, les triangles ſemblables EOG, EFC, & FEB, FOH, donneront $EO. EF :: OG. FC$. Et $EF. FO :: EB. OH$, & partant $EO \times EF. EF \times FO$ ou $EO. FO :: OG \times BE. CF \times OH$, c'eſt-à-dire en raiſon compoſée de OG à OH, ou de m à n (puiſqu'en prenant MO pour le rayon ou ſinus total, les droites OG, OH, ſont les ſinus droits des angles EMO, FMO, complémens à deux droits des angles AME, AMF), & de BE à CF ou de EM à MF à cauſe des triangles rectangles ſemblables BME, CMF. On aura donc $EO. FO :: m \times EM. n \times MF$. Cela poſé.

On nommera les données AD ou PQ, a; ED, b; DF, c; AM, r; & les inconnues AP, x; PM, y; & on aura à cauſe des triangles ſemblables APM, ADO, cette proportion, $MP(y). AP(x) :: AD(a). DO = \frac{ax}{y}$. Et partant $EO = \frac{by+ax}{y}$, $FO = \frac{cy+ax}{y}$. Or les triangles rectangles EMQ, FMQ, donnent $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2$ $(bb+2bx+xx) + \overline{MQ}^2 (aa+2ay+yy) = ff+2bx$ $-2ay$ (en mettant pour $xx+yy$ ſa valeur rr à cauſe du triangle rectangle APM, & faiſant pour abréger $aa+bb+rr=ff$) & de même $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2 (cc-2cx$ $+xx) + \overline{MQ}^2 (aa-2ay+yy) = gg-2cx-2ay$ en mettant pour $xx+yy$ ſa valeur rr, & faiſant pour abréger $aa+cc+rr=gg$. Si dans la proportion précédente $EO. FO :: m \times EM. n \times MF$, on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens,

on formera cette équation $bny+anx\sqrt{gg-2cx-2ay} = mcy-max\sqrt{ff+2bx-2ay}$, de laquelle quarrant chaque membre & faiſant évanouir l'inconnue y par le moyen de l'équation au cercle $xx+yy=rr$, on arrivera encore à une égalité du ſixieme degré, dont la réſolution fournira pour AP (x) une valeur telle que menant la perpendiculaire PM, elle ira couper la circonférence au point cherché M.

C'eſt à-peu-près de cette façon que M. Deſcartes réſoud cette queſtion dans la ſoixante-cinquieme de ſes Lettres, Tom. 3. Elle lui avoit été propoſée par M. de Roberval, d'une maniere qui paroît différente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même choſe.

TROISIEME MANIERE.

Soient décrits deux diamertes AE, AF, deux cercles ART, AST, ſur leſquels ſoient portées depuis le point A deux cordes quelconques AR, AS, qui ſoient toujours entr'elles en la raiſon donnée de m à n; & ſoient tirées les droites ER, FS, qui s'entrecoupent au point M. Je dis que la ligne courbe AM, qui eſt le lieu de tous les points M ainſi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre eſt en A) au point cherché M. FIG. 260.

Car tirant AM & le prenant pour rayon ou ſinus total, il eſt clair que la corde AR eſt le ſinus droit de l'angle AME, & la corde AS le ſinus droit de l'angle AMF.

Il eſt à propos de remarqver, 1°. que cette conſtruction a cela de particulier, qu'elle ne réuſſit pas ſeulement lorſqu'il s'agit de trouver le point M ſur la circonférence d'un cercle dont le centre eſt en A, mais encore ſur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la maniere que l'on vient d'enſeigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il ſuffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette conſtruction fort aiſée. 3°. Que le lieu de tous les points M ainſi trouvés eſt du quatrieme degré, comme il eſt facile de voir par le calcul de la ſeconde maniere, en obſervant de ne point ſubſtituer dans les valeurs de EM & FM à la place de $xx+yy$ le quarré rr que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $nby+nax\sqrt{c-x+a-y} = mcy-max\sqrt{b+x+a-y}$, dont les inconnues x & y montent au quatrieme degré, lorſqu'elle eſt délivrée d'incommenſurables. 4°. Que ce n'eſt pas une faute légere en Géométrie, ſelon M. Deſcartes, d'employer une ligne courbe trop compoſée pour réſoudre un Problême; de ſorte que ſelon lui, on doit préférer à cette derniere ſolution les deux précédentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur interſection avec la circonférence donnée, le point cherché, ne ſont que du troiſieme degré. Il me paroît néanmoins que la facilité d'une conſtruction & ſa ſimplicité peuvent récompenſer en quelque ſorte ce défaut, & c'eſt ce qu'on verra encore dans l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE IX.

FIG. 261. 440. DIVISER un triangle ſcalene donné ABC en quatre parties égales, par deux lignes droites DE, FG, qui s'entrecoupent à angles droits au point H.

Si l'on fait attention ſur la nature de ce Problême, on verra, 1°. que deux des extrêmités D, F, des deux droites DE, FG, ſe trouvent néceſſairement ſur l'un des côtés AC du triangle donné ABC, & que leurs deux autres extrêmités E, G, ſe trouvent chacune ſur chacun des deux autres côtés BC, BA. 2°. Que les deux points cherchés D, F, doivent avoir deux conditions, dont la premiere eſt que les lignes DE, FG, qui diviſent chacune le triangle ABC en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point H;

H; & la ſeconde quelles forment avec les deux autres côtés du triangle donné, un quadrilatere $BGHE$ qui ſoit la quatrieme partie du triangle ABC. Cela poſé.

Soient menées ſur le côté AC les perpendiculaires GI, BK, EL, & ſoient nommées les données $AC, 2a$; BK, b; AK, c; KC, d; & les inconnues AF, x; CD, y. Puiſque le triangle AGF, ou $GI \times \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle ABC (ab), il s'enſuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par la même raiſon $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles ſemblables CBK, CEL, & ABK, AGI, donnent $BK\,(b).$ $EL\left(\frac{ab}{y}\right) :: CK\,(d).\ CL = \frac{ad}{y}$. Et $BK\,(b).\ GI\left(\frac{ab}{x}\right) :: AK\,(c).$ $AI = \frac{ac}{x}$. Et partant DL ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, FI ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles DEL, FGI, ſont ſemblables entr'eux; puiſque chacun d'eux eſt ſemblable au même triangle FDH, qui eſt rectangle en H ſelon la condition du Problême qui demande que les deux lignes DE, FG, s'entrecoupent à angles droits. On aura donc $EL\left(\frac{ab}{y}\right).\ LD\left(\frac{yy-ad}{y}\right) :: FI$ $\left(\frac{xx-ac}{x}\right).\ IG\left(\frac{ab}{x}\right)$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $\overline{xx - ac} \times \overline{yy - ad} = aabb$, qui renferme la premiere condition du Problême; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à accomplir la ſeconde; ſçavoir que le Trapéſe $BGHE$ ſoit le quart du triangle donné ABC.

Pour en venir à bout. Du point d'interſection H des deux droites DE, FG, ſoient menées aux trois angles du triangle ABC, les lignes HA, HC, HB; & on aura 1°. $FD\,(x + y - 2a).\ AF\,(x) :: FHD\,(\frac{1}{4} ab).\ FHA$ $= \frac{abx}{4x + 4y - 8a}$. Et partant le triangle AHG ou le triangle FGA moins le triangle $FHA = \frac{1}{2} ab - \frac{abx}{4x + 4y - 8a}$.

2°. $AI\left(\frac{ac}{x}\right)$. $IK\left(\frac{cx-ac}{x}\right)::AG.GB::AHG\left(\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a}\right)$. $GHB=\frac{bxx-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable que le triangle $HEB=\frac{byy-5aby+2bxy-2abx+4aab}{4x+4y-8a}$. Maintenant ſi l'on ajoute enſemble les triangles HGB, HEB, on formera le quadrilatere $HGBE$ qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatrieme partie du triangle ABC: ce qui donne pour la ſeconde équation $xx+yy+4xy-8ax-8ay+10aa=0$.

Si l'on fait évanouir par le moyen de ces deux équations l'inconnue y, on arrivera à une égalité du huitieme degré qui renfermera toutes les conditions du Problême, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une ſeule inconnue x; de ſorte que toute la difficulté eſt réduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'eſt ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troiſieme degré, comme l'on a enſeigné dans les articles 417, & 418 (Liv. précéd.). Mais comme la conſtruction de ces lieux devient fort embarraſſée & d'une longueur inſupportable dans la pratique, à cauſe de la multitude des termes de leurs équations, il eſt beaucoup plus naturel de conſtruire ſéparément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux ſoit du quatrieme degré & par conſéquent plus compoſé, car l'autre n'étant que du ſecond récompenſe ce défaut, & d'ailleurs la facilité de la conſtruction doit déterminer en ſa faveur: voici comment elle ſe fait.

FIG. 262. Ayant mené deux lignes droites indéfinies AB, AC, qui ſont entr'elles un angle droit BAC; on prolongera BA en E, enſorte que $AE=\sqrt{ac}$, & CA en F, enſorte que $AF=\sqrt{ad}$. Ayant pris ſur AC une partie quelconque AP, on décrira du centre E de l'intervalle AP un arc de cercle qui coupe AC en G; & ayant pris AH, enſorte que le rectangle $HA\times AG$ ſoit égal au triangle donné BAC, on prendra ſur AB la partie

$AQ=FH$. On menera enſuite les droites PM, QM, parallèles à AB, AC, leſquelles s'entrecoupent en un point M; & ayant trouvé en la même ſorte une infinité d'autres points tels que M, on fera paſſer par tous ces points une ligne courbe KML. Cela fait, on prendra ſur la diagonale AD du quarré $ABDC$, qui a pour côté la ligne AC égal au côté AC du triangle donné ABC, les parties $AT=\frac{1}{2}AD$, & $DS=\frac{1}{6}AD$; & on décrira du premier axe TS qui ſoit à ſon parametre comme 1 eſt à 3, une Hyperbole OSR. Je dis à préſent que ſi l'on mene du point M où je ſuppoſe qu'elle rencontre la ligne courbe KML au dedans du quarré $ABDC$, la perpendiculaire MP ſur AC, & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle ABC, les parties $AF=AP$, & $CD=PM$; les points F, D, ſeront tels qu'ayant mené (ce qui eſt facile) les deux droites FG, DE, qui diviſe chacune le triangle ABC en deux parties égales; elles s'entrecouperont à angles droits, & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant AP, x; PM, y; on aura à cauſe des triangles EAG, FAH, rectangles en A, le quarré $\overline{AG}=\overline{EG}\,(xx)-\overline{AE}\,(ac)$, & le quarré $\overline{AH}=\overline{FH}\,(yy)-\overline{AF}\,(ad)$. Or puiſque par la conſtruction le rectangle $HA\times AG$ eſt égal au triangle donné $BAC\,(ab)$, il s'enſuit que $\overline{HA}\times\overline{AG}\,(yy-ad\times xx-ac)=aabb$. La ligne courbe KML ſera donc le lieu de cette équation qui eſt la premiere des deux que l'on vient de trouver; & par conſéquent ſa propriété ſera telle que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP ſur AC, & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF=AP$, & $CD=PM$; les droites FG, DE qui diviſe chacune par le milieu le triangle ABC, s'entrecouperont à angles droits au point H.

De plus ſi d'un point quelconque M de l'Hyperbole OSR, on mene la perpendiculaire MV ſur ſon premier

axe TS, & qu'on prolonge PM juſqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale AD au point X; les triangles rectangles & iſoſcelles APX, MVX, donneront $1.\sqrt{2}::AP$ ou $PX(x).AX=x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}.1::MX(x-y).MV$ ou $VX=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$; & partant AV ou $AX-XV=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Or par la conſtruction $AD=2a\sqrt{2}$ puiſque $AC=2a$, & par conſéquent TS ou $DT-DS=\frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc TV ou $AV-AT=\frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$, & VS ou $TV-TS=\frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la propriété de l'Hyperbole $TV\times VS\left(\frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+20aa}{6}\right).\overline{MV}^{2}\left(\frac{xx-2yx+yy}{2}\right)::1.3$, c'eſt-à-dire, comme le premier axe TS eſt à ſon parametre : ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx+yy+4xyy-8ax-8ay+10aa=0$. L'Hyperbole OSR en ſera donc le lieu, & jouira par conſéquent de cette propriété; ſçavoir que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP ſur AC, & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF=AP$, & $CD=PM$; les droites FG, DE, qui diviſe chacune par le milieu le triangle ABC, le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puiſque le point M ſe trouve en même tems ſur la ligne courbe KML, & ſur l'Hyperbole OSR; il s'enſuit que les points D, F, pris ſur le côté AC du triangle donné, auront auſſi en même tems les deux conditions requiſes. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

S'il arrivoit que les deux courbes OSR, KML, ne ſe rencontraſſent point au dedans du quarré $ABDC$, ce ſeroit une marque infaillible qu'on auroit fait une ſuppoſition fauſſe, ſçavoir que les deux extrêmités D, F, ſe rencontrent ſur le côté AC. C'eſt pourquoi il fau-

droit les ſuppoſer ſur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faiſant des raiſonnemens ſemblables aux précédens, pour avoir une conſtruction par rapport à ce nouveau côté. Mais ſi l'on fait les trois remarques ſuivantes, il ſera aiſé de prévoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui ſur lequel tombent les deux extrêmités D, F, afin d'avoir sûrement une ſolution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La premiere eſt que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$; ce qui ſe voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx-ac} + ad$ à la place de $AP(x)$ ſa valeur $AC(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy-ad} + ac$ à la place de $AQ(y)$ ſa valeur $AB(2a)$. La ſeconde conſiſte en ce que $CR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui ſe trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$ dont le lieu eſt l'Hyperbole OSR, d'abord à la place de $AP(x)$ ſa valeur $AC(2a)$, & enſuite à la place de $AQ(y)$ ſa valeur $AB(2a)$. La troiſieme ſe tire de ce qu'en ſuppoſant $AK(c)$ moindre que $CK(d)$ comme on le fait ici, il s'enſuit que $\overline{BK}^2\left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac\right)$ eſt moindre que $\overline{CL}^2\left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad\right)$. Or cela poſé, ſi l'on veut que $\overline{BK}^2\left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac\right)$ ſoit moindre que $\overline{BO}^2(2aa)$, on trouvera en mettant pour d ſa valeur $2a-c$ & opérant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'eſt-à-dire, que le côté AB du triangle donné ABC doit être moindre que le côté AC: & ſi l'on veut que le quarré $\overline{CL}^2\left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad\right)$ ſoit plus grand que $\overline{CR}^2(2aa)$, on trouvera en mettant pour c ſa valeur $2a-d$ & opérant à l'ordinaire que le côté BC $(\sqrt{bb+dd})$ doit ſurpaſſer le côté $AC(2a)$. Mais il eſt viſible que BK étant moindre que BO & CL plus grande que CR, les deux lignes courbes KML, OMR,

ſe coupent néceſſairement au dedans du quarré $ABDC$. D'où il ſuit que ſi le triangle donné ABC a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté AC ſur lequel on ſuppoſe que les deux points F, D, ſe rencontrent, celui des trois dont la grandeur eſt moyenne entre les deux autres & pour le côté AB le plus petit, le Problême aura toujours néceſſairement une ſolution, puiſqu'alors (*fig.* 261.) le point K ſe trouvera entre les points A, C, & que AK eſt moindre que AC, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul ſur lequel tout ce raiſonnement eſt fondé. On trouvera en la même ſorte que ſi le triangle donné eſt rectangle ou obtus-angle, & qu'on prenne pour le côté AC ſur lequel doivent tomber les deux extrêmités D, F, le côté moyen, on aura toujours une ſolution; de ſorte que cette remarque eſt générale pour toutes ſortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole OSR & la courbe KML ſe coupent non-ſeulement dans un point M, au dedans du quarré $ABDC$, comme le demande le Problême; mais encore en un autre point M au dehors de ce quarré. Or ſi l'on veut ſçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des réſolutions du Problême ſuivant, dont celui-ci n'eſt qu'un cas particulier.

FIG. 263. Trouver ſur le côté AC du triangle donné ABC, deux points F, D, tels qu'ayant mené les droites FG, DE, qui ſont avec les deux autres côtés AB, BC, les triangles FGA, DEC, égaux chacun à la moitié du triangle ABC: les lignes FG, DE, s'entrecoupent à angles droits au point H, & le quadrilatere $BGHE$ ſoit égal au quart du triangle ABC.

FIG. 263 & 262. Car lorſque le point d'interſection M tombe au dedans du quarré $ABDC$, il eſt clair que les lignes AP, PM ſeront chacune moindre que le côté AC, & qu'ainſi les points F, D, qu'elles déterminent tomberont tous deux entre les points A, C; ce qui réſoud le Problême énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorſque le point M tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes AP, PM eſt moindre que ſon côté AC, & l'autre plus grande; il s'enſuit que l'un des points F, D, tombe ſur le côté AC du triangle donné, & l'autre ſur ce même côté prolongé; ce qui donne une autre ſolution du Problême énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 23 & 24.

EXEMPLE X.

441. UNE Section conique MAN étant donnée, avec un point S hors de ſon plan pour le ſommet du cône dont elle eſt la Section; on demande la poſition du cercle MaN qui en eſt la baſe.

Je diſtingue cette queſtion en deux différens cas, dont le premier eſt lorſque la Section donnée eſt une Parabole, & le ſecond lorſque c'eſt une Ellipſe ou une Hyperbole.

Premier cas. La queſtion ſe réduit à trouver ſur la Parabole, le point A tel qu'ayant mené de ce point le diametre AP avec la ligne AS; du point S la ligne SD parallèle à AP; & d'un point quelconque P du diametre AP, une ordonnée PM à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire aD à cette ordonnée dans le plan du triangle DSA, qui rencontre les côtés SA, SD, aux points a, D: le quarré de PM ſoit égal au rectangle $aP \times PD$. Car décrivant dans le plan aPM un cercle qui ait pour diametre aD, il eſt clair qu'il paſſera par le point M, puiſque l'angle AMa eſt droit, & que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$, qui eſt la propriété eſſentielle du cercle; c'eſt pourquoi menant le diametre PA, & tirant de l'extrêmité D, du diametre Da du cercle une parallèle DS à PA, qui rencontre aA menée de ſon autre extrêmité a par l'origine A du diametre AP, en un point S, le cône qui a pour ſommet ce point, & pour baſe le cercle MAN, formera * par ſa rencontre avec le plan APM la Parabole même FIG. 264. * Art. 269.

donnée MAN. Voici comment on peut trouver le point A.

Soit v le parametre inconnu du diametre AP, & l'on aura par la propriété de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$: mais pour ſatisfaire au Problême, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP.\ Pa :: PD.\ v$, qui ſe change en menant AO parallèle à Da en cette autre $SO.\ AO :: PD$ ou $AO.\ v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné S ſur le plan de la Parabole la perpendiculaire SF, & du point F où elle rencontre ce plan, ſur l'axe BG la perpendiculaire FG, qui rencontre le diametre AP en H. Je tire du point A l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AQ à la tangente AL, leſquelles rencontrent en E & Q la ligne FQ menée par le point F parallèlement à l'axe. J'éleve enfin du point Q une perpendiculaire QO ſur le plan de la Parabole, qui rencontrera SD dans le même point O, où la ligne AO parallèle à aD la rencontre. Car la tangente AL étant parallèle à l'ordonnée PM qui eſt perpendiculaire ſur aD, l'angle LAO ſera droit auſſi-bien que l'angle LAQ, & ainſi le plan QAO ſera perpendiculaire ſur AL, & ſur le plan de la Parabole qui paſſe par cette ligne; c'eſt pourquoi la ligne QO perpendiculaire à ce plan ſe trouvera dans le plan QAO, & rencontrera par conſéquent la ligne SD dans le même point O, où le plan QAO, c'eſt-à-dire, la ligne AO parallèle à aD la rencontre. Il eſt à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, ſont dans le plan de la Parabole. Cela poſé.

Je nomme les données SF ou QO, a; FG, ou KE, b; GB, c; le parametre de l'axe, p; & les inconnues BK, x; KA ou GH, y; & j'ai à cauſe des triangles ſemblables AKT, AEQ, cette proportion $AK\ (y).\ KT\ (\frac{1}{2}p) :: AE\ (b+y).\ EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$: ce qui donne à cauſe

cause des triangles AEQ, AQO, rectangles en E & Q, le quarré $\overline{AO}$ ou $\overline{AE}+\overline{EQ}+\overline{QO}=\frac{bbpp}{4yy}+\frac{bpp}{2y}$ $+\frac{1}{4}pp+bb+2by+yy+aa$. Or le parametre du diametre AP sçavoir $v=$ *$p+4x=p+\frac{4yy}{p}$, en mettant pour x sa valeur $\frac{yy}{p}$; & SO ou FQ ou $GB+BK$ $+EQ=c+x+\frac{bp}{2y}+\frac{1}{4}p=c+\frac{yy}{p}+\frac{bp}{2y}+\frac{1}{4}p$. Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $\overline{AO}=SO\times v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy}+\frac{bpp}{2y}+\frac{1}{4}pp+bb+2by+yy+aa$ $=cp+yy+\frac{bpp}{2y}+\frac{1}{4}pp+\frac{4cyy}{p}+\frac{4yy}{pp}+2by+2yy$, c'est-à-dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui se trouvent les mêmes, substituant pour yy la valeur px, & opérant ensuite à l'ordinaire ; * *Art.* 17.

$$x^3+cxx+\tfrac{1}{4}cpx-\tfrac{1}{16}bbp=o$$
$$+\tfrac{1}{2}p\ -aa$$
$$-\tfrac{1}{4}bb$$
$$+\tfrac{1}{16}pp$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen * de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnue BK, qui sert à déterminer le point A tel qu'on le demande. * *Art.* 387.

Second cas. Toute la difficulté consiste à trouver sur l'Hyperbole donnée MAN, le point A tel qu'ayant mené le diametre AB avec les lignes SAa, BSb; & par un de ses points quelconques P, du diametre AB une ordonnée PM dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire ab à cette ordonnée dans le plan du triangle aSb: on ait le quarré $\overline{PM}$ égal au rectangle $aP\times Pb$. Cela se prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point A. FIG. 265.

Soit v le diametre conjugué au diametre AB, & soient menées dans le plan du triangle aSb, les lignes AO parallèle à ab, & OZ parallèle à AB qui rencontre

SA en Z; & l'on aura $AP \times PB$ à $\overline{PM}$ ou (à cauſe du cercle) à $aP \times Pb$, en raiſon compoſée de AP à Pa, ou ZO à OA, & de PB à Pb, ou de BA à AO; c'eſt-à-dire, comme $ZO \times AB$ eſt à $\overline{AO}$. Or par la propriété de l'Hyperbole, $AP \times PB. \overline{PM} :: \overline{AB}. vv$; & partant $ZO \times AB. \overline{AO} :: \overline{AB}. vv = \frac{AB \times \overline{AO}}{ZO}$. Ce qui donne $OZ. AB$, ou $OS. SB :: \overline{AO}. vv$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques, tant de la raiſon de OS à SB, que des quarrés $\overline{AO}$ & vv; je mene du point donné S, la ligne SF perpendiculaire ſur le plan des Hyperboles; du point F où elle rencontre ce plan, la perpendiculaire FG à l'axe DK qui eſt donné de poſition & de grandeur, puiſque les Hyperboles ſont données; & du point cherché A, l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AT à la tangente AL, leſquelles rencontrent la ligne BF aux points E, Q. Je tire enfin BH parallèle à l'axe qui rencontre GF en X, TV parallèle à BF qui rencontre AE en V, & BD, QR, perpendiculaires ſur l'axe; & ayant élevé QO perpendiculaire ſur le plan de l'Hyperbole, on prouvera comme dans la Parabole qu'elle rencontrera la ligne BS au même point O, où la ligne AO parallèle à ab la rencontre. Il eſt à remarquer que toutes ces lignes, excepté les deux FS, QO, ſont dans le plan des Hyperboles. Cela poſé.

Soient nommées $SF = a$, $FG = b$, $CG = c$, le premier axe $= 2d$, le ſecond $= 2f$, les inconnues CK ou $CD = x$, AK ou BD ou GX ou $KH = y$; & l'on aura DK ou $BH = 2x$, DG ou $BX = c + x$, $GK = x - c$, $TK = \frac{ffx}{dd}$, & AT ou $\sqrt{\overline{TK^2} + \overline{AK^2}} = \sqrt{yy + \frac{f^4xx}{d^4}}$ $= \frac{f}{dd}\sqrt{\overline{ddxx} + \overline{ffxx} - d^4}$ en mettant pour yy ſa valeur * $\frac{ffxx}{dd} - ff$. Or les triangles ſemblables BXF, BHE, TKV donnent $BX\ (c+x).\ XF\ (b-y) :: BH\ (2x).$

* *Art.* 81.

$HE = \frac{2bx-2xy}{c+x} :: TK\left(\frac{ff}{dd}x\right). KV = \frac{bffx-ffxy}{cdd+ddx}$; & partant AE ou $AK + KH + HE = \frac{2bx+2cy}{x+c}$, & AV ou $AK - KV = \frac{cddy+ddxy+ffxy-bffx}{cdd+ddx}$: mais à cauſe des triangles ſemblables AVT, AEQ, & ATK, QTR, il vient $AV. AT :: AE. AQ = \frac{2bfx+2cfy\sqrt{ddxx+ffxx-d^4}}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$, & $AT. TK :: QT. TR :: AT + TQ$ ou $AQ. KT + TR$ ou $KR = \frac{2bffxx+2cffxy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$. Donc $\frac{GR \text{ ou } GK+KR}{DG} = \frac{ddxy+ffxy+bffx-cddy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$, $\frac{DR \text{ ou } DK+KR \times FS}{DG} = \frac{2addxy+2affxy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy} = QO$, puiſque $DG. DR :: BF. BQ :: FS. QO$; & à cauſe du triangle rectangle AQO, le quarré $\overline{AO}$ ou $\overline{AQ} + \overline{QO} = \frac{\overline{2bfx+2cfy}^2 \times \overline{ddxx+ffxx-d^4} + \overline{2addxy+2affxy}^2}{\overline{ddxy+ffxy-bffx+cddy}^2}$. De plus $SO. SB :: FQ. FB :: GR. GD$, & $vv = {}^{*} 4xx + 4yy + 4ff - 4dd$ ou $4xx - 4dd + \frac{4ffxx}{dd}$. * Art. 125.

Si donc l'on met dans la proportion $SO. SB :: \overline{AO}. vv$, à la place tant de la raiſon de SO à SB ou GR à GD, que des quarrés $\overline{AO}$ & vv, les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, on formera en multipliant les extrêmes & les moyens cette égalité $\overline{2bfx+2cfy}^2 \times \overline{ddxx+ffxx-d^4} + \overline{2addxy+2affxy}^2 = \overline{ddxy+ffxy+bffx-cddy} \times \overline{ddxy+ffxy-bffx+cddy} \times \overline{4xx + \frac{4ffxx}{dd} - 4dd}$, dans laquelle tous les termes où y ſe rencontrera au premier degré s'effaceront ; & mettant à la place du quarré yy ſa valeur $\frac{ffxx}{dd} - ff$, on trouvera $bbd^4x^4 + 2bbddffx^4 + bbf^4x^4 - bbd^6xx - ccd^6xx - bbffd^4xx - ccffd^4xx + ccffd^6 + ccd^8 = \overline{ddxx+ffxx-d^4-aadd-ccdd} \times \overline{ddx^4 + 2ffx^4 + \frac{f^4}{dd}x^4 - d^4xx - 2ddffxx - f^4xx}$ qui ſe change en faiſant pour abréger

$dd+ff=mm$, $bb+cc=nn$, $aa+dd+cc=rr$, en cette autre $bbm^4x^4-mmnnd^4xx+ccmmd^6 = mmxx-ddrr\times\frac{m^4}{dd}x^4-m^4xx$ qui se réduit enfin en faisant $xx=dz$ à cette égalité du troisieme degré

$$z^3\left\{\begin{matrix}-d\\-\frac{drr}{mm}\\-\frac{dbb}{mm}\end{matrix}\right\}zz\left\{\begin{matrix}+\frac{ddrr}{mm}\\+\frac{nnd^4}{m^4}\end{matrix}\right\}z-\frac{ccd^5}{m^4}=0;$$

dont l'une des racines ; sçavoir celle qui est plus grande que d, est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & d moitié du premier axe ; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de CK qui sert à déterminer le point cherché A. On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396, & 399. du Livre précédent.

Lorsque $CG\,(c)=o$, c'est-à-dire, lorsque le point F tombe sur le second axe ; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré, puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par z. Mais lorsque $FG\,(b)=o$, ce qui arrive lorsque le point F tombe sur le premier axe ; le terme $\frac{dbbzz}{mm}$ s'efface dans l'égalité précédente, & un qui est $bb+cc$ devient cc ; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z-d$, & qu'elle se réduit par conséquent à celle-ci $zz-\frac{drr}{mm}z+\frac{ccd^4}{m^4}=o$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette derniere égalité $c=o$; ce qui doit arriver lorsque le point F tombe sur le centre C, puisqu'alors les lignes b & c deviennent chacune nulles ; on aura $z=\frac{drr}{mm}$, & partant dz ou $xx=\frac{ddrr}{mm}$, & $x=\frac{dr}{m}=d\sqrt{\frac{aa+dd}{dd+ff}}$.

Il est inutile d'avertir que le Problême se résoud par

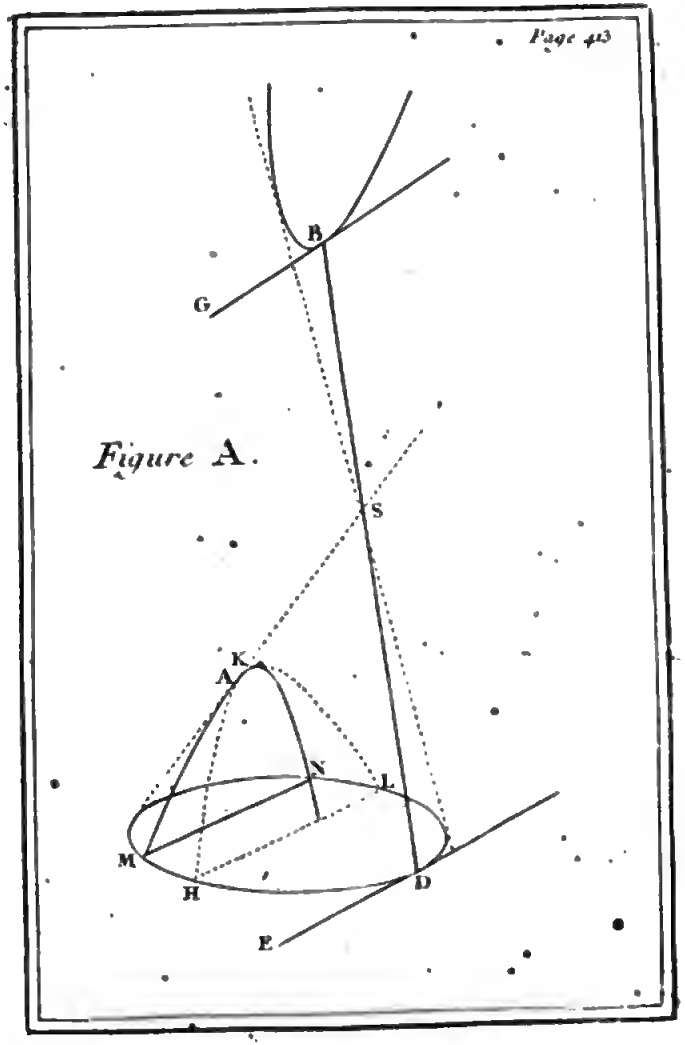


Figure A.

Digitized by Google

la même voie dans l'Ellipſe, n'y ayant de changement que dans quelques ſignes. Mais on peut toujours rapporter, ſi l'on veut, ce ſecond cas au premier, de la maniere qui ſuit.

Ayant mené par un point quelconque B de l'une des Hyperboles données, une tangente BG; & ayant fait paſſer par cette tangente, & par le ſommet donné S, un plan GBS: ſoit mené par tout où l'on voudra, un autre plan HKL parallèle à celui-ci. Je dis qu'il formera dans la ſurface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en S, & mue autour de l'Hyperbole oppoſée MAN, une ligne courbe HKL qui ſera une Parabole; de ſorte que toute la difficulté eſt réduite au cas précédent. Car ſuppoſant que le cercle $DHMNL$ ſoit la baſe du cône, qui a pour ſommet le point S, & pour Section l'Hyperbole MAN avec ſon oppoſé; il eſt clair que le plan GBS touchant les deux ſurfaces coniques oppoſées qui ont pour baſe ce cercle, dans le côté BSD, formera dans le plan de la baſe, une ligne droite DE qui touchera cette baſe en un point D. Or comme cette ligne eſt la directrice par rapport à la Section HKL, il s'enſuit ſelon la définition dixieme du Livre VI. que cette Section ſera une Parabole. FIG. 4.

Ce Problême a été très-célebre du tems de M. Deſcartes, & l'on en a trouvé une ſolution parmi ſes Manuſcrits, qui eſt imprimée à la fin de la 75ᵉ Lettre du 3ᵉ tome. Si l'on veut ſe donner la peine de comparer ſa ſolution avec la mienne, on verra que non-ſeulement elle eſt moins naturelle puiſqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle eſt beaucoup plus embarraſſée. Auſſi ne donne-t-il point l'analyſe du cas où la Section eſt une Ellipſe ou une Hyperbole; & il ſe contente d'aſſurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problême, ne doit pas paſſer le quatrieme degré.

LEMME I.

FIG. 166. 167. 168. 442. SI *par l'extrémité* B *d'un diametre* AB, *l'on mene une corde quelconque* BD *qui termine l'arc* AD *moindre que la demie circonférence ; & qu'ayant pris par-tout où l'on voudra deux arcs contigus* EF, FG, *égaux chacun à l'arc* AD, *on tire les cordes* BE, BF, BG : *je dis que la corde du milieu* BF *eſt à la ſomme ou à la différence de ſes deux voiſines* BE, BG, *comme le rayon* CB *eſt a la corde* BD : *ſçavoir à la ſomme lorſque l'origine commune* B *des cordes* BD, BE, BF, BG, *ne tombe ſur pas un des deux arcs* EF, FG ; *& au contraire à la différence, lorſqu'il tombe ſur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car ſoit du centre *F*, & du rayon *FB*, décrit un arc de cercle qui coupe la corde *BG* prolongée, s'il eſt néceſſaire, au point *H*, pour avoir une triangle iſoſcelle *BFH*, qui ſera ſemblable au triangle iſoſcelle *DCB* ; puiſque l'angle *FBH* a pour meſure la moitié de l'arc *FG* égal à l'arc *AD*, dont la moitié eſt auſſi la meſure de l'angle *CBD*. On aura donc *FB*. *BH* :: *CB*. *BD*, de ſorte qu'il ne reſte qu'à démontrer que la ligne *BH* eſt la ſomme des deux cordes *BE*, *BG*, dans le premier cas, & leur différence dans le ſecond. Pour le faire.

FIG. 166. Soient tirées les cordes *EF*, *FG*, & on aura deux triangles *BEF*, *FHG*, qui ſeront ſemblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle *FHB* ou *FHG*, eſt égal à l'angle *FBH* qui vaut l'angle *FBE*, puiſque les arcs *FG*, *FE*, ſont égaux ; & de plus l'angle *BEF* eſt égal à l'angle *FGH*, puiſqu'ils ont chacun pour meſure la moitié du même arc *BF* ; & partant l'angle *GFH* eſt égal à l'angle *EFB*. Or les côtés *FE*, *FG*, & *FB*, *FH*, ſont égaux entr'eux. Le côté *GH* ſera donc égal au côté *BE*. Donc, &c.

FIG. 167. 168. On prouvera à-peu-près de même dans le ſecond cas que les triangles *FHG*, *FBE*, ſont ſemblables & égaux ; & qu'ainſi la ligne *BH* eſt la différence des deux cordes *BG*, *BE*.

LEMME II.

443. SOIT *une Table dont le premier rang parallèle renfermant le nombre* 2, *& le ſecond la lettre* x; *le troiſieme* xx—2 *ſoit le produit du ſecond par* x, *moins le premier, le quatrieme* x^3—3x *ſoit le produit du troiſieme par* x, *moins le ſecond, le cinquieme* x^4—4xx+2 *ſoit le produit du quatrieme par* x *moins, le troiſieme, & ainſi de ſuite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *diviſé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. FIG. 269. 270. *Je dis que ſi le premier rang* 2 *de la Table exprime la valeur du diametre* BA, *& le ſecond rang* x *celle de la premiere corde* BD; *le troiſieme rang* xx—2 *exprimera la valeur de la ſeconde corde* BE, *le quatrieme rang* x^3—3x *celle de la troiſieme corde* BF, *& ainſi de ſuite juſqu'à la derniere* BR : *en obſervant que ces cordes deviennent négatives, lorſqu'elles paſſent de l'autre côté du point* B.

Table pour la diviſion des arcs de cercle en parties égales.

1e	2
2e	1x
3e	$1xx - 2$
4e	$1x^3 - 3x$
5e	$1x^4 - 4xx + 2$
6e	$1x^5 - 5x^3 + 5x$
7e	$1x^6 - 6x^4 + 9xx - 2$
8e	$1x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$
9e	$1x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + 2$
10e	$1x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$
11e	$1x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx - 2$
12e	$1x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x$
13e	$1x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 2$
14e	$1x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x$

Car, 1°. lorſque l'arc *AR* eſt moindre que la demie circonférence *ADB*; ſi l'on multiplie une corde quelconque *BF* par *x*; & qu'on retranche de ce produit la corde *BE* qui la précede, on aura la corde *BG* qui la ſuit immédiatement, puiſque ſelon le Lemme précé- FIG. 269.

dent $CB(1).\ BD(x)::BF.\ BE+BG=xBF$, & partant $BG=xBF-BE$. Donc, &c.

FIG. 270. 2°. Lorſque l'arc AR eſt plus grand que la demie circonférence ADB; il eſt viſible que l'origine commune B de toutes les cordes ſe trouvera néceſſairement ſur l'une des parties égales comme GH, dans leſquelles l'arc AR eſt diviſé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troiſieme rang de la Table exprime la valeur de BE, le quatrieme celle de BF, & ainſi de ſuite juſqu'à BG: mais il reſte à démontrer que le rang qui ſuit celui qui exprime la corde BG, n'exprimera point la valeur de $+BH$, mais celle de $-BH$; & de même que le rang qui ſuit ce dernier exprime la valeur de $--BI$, & ainſi de ſuite juſqu'à $-BR$.

Selon la formation de la Table, le rang qui ſuit celui qui exprime BG eſt $xBG-BF$. Or par le Lemme $CB(1).\ BD(x)::BG.\ BF-BH$, & partant $-BH=xBG-BF$; c'eſt-à-dire que $-BH$ vaut le rang parallèle de la Table qui ſuit immédiatement celui qui exprime la valeur de BG. Mais ſelon la formation de la même Table, le rang qui ſuit celui qui vaut $-BH$ eſt $-xBH-BG$ valeur de BI, puiſque ſelon le Lemme $xBH=BI-BG$: & de même le rang qui ſuit celui qui vaut $-BI$ eſt ſelon la formation de cette même Table $-xBI+BH$ valeur de la corde négative $-BL$, puiſque ſelon le Lemme $xBI=BL+BH$. Or il eſt viſible qu'il en eſt de même de toutes les cordes qui ſuivent BL juſqu'à BR; & c'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

COROLLAIRE I.

FIG. 269. 270. 444. DE-LA il eſt évident que ſi l'arc AR eſt diviſé en cinq parties égales, le ſixieme rang de Table x^5-5x^3+5x exprimera la valeur de la corde bR qui ſoutend l'arc BR différence de l'arc AR & de la demie circonférence ADB; que s'il étoit diviſé en ſept parties égales, le huitieme rang ſeroit la valeur de BR;

&

& en général qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut BR : en obſervant que le rayon $CB = 1$, que la premiere corde $BD = x$, & que la derniere corde BR eſt négative lorſque l'arc AR eſt plus grand que la demie circonférence.

COROLLAIRE II.

445. ON voit par la compoſition de cette Table, 1°. que le nombre 2 eſt le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 2°. Que les coëficiens de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire ſont égaux à l'unité. 3°. Que le coëficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, eſt toujours égal au coëficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coëficient du terme qui eſt au-deſſus de lui : c'eſt-à dire, par exemple, que le coëficient 14. du quatrieme terme $14x^3$ du troiſieme rang perpendiculaire, eſt égal au coëficient 5 du quatrieme terme $5x^3$ du deuxieme rang perpendiculaire qui eſt le rang à gauche, plus au coëficient 9 du terme $9xx$ qui eſt au-deſſus du terme $14x^3$.

REMARQUE.

446. SI l'on continuoit à diviſer la circonférence en parties égales aux arcs AD, DE, &c. au-delà du point R; il eſt clair que les rangs parallèles de la Table qui ſuivent celui qui exprime $-BR$ continueroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui ſuivroient BR, juſqu'à ce que repaſſant le point B elles redeviendroient encore négatives ; & ainſi de ſuite alternativement poſitives & négatives, autant de fois qu'elles paſſeroient le point B juſqu'à l'infini. FIG. 270.

EXEMPLE I.

447. COUPER un arc de cercle donné AR, en autant de parties égales AD, DE, EF, FG, &c. qu'on voudra.

FIG. 269. 270. Ayant mené le diametre AB & la corde BR, & nommé le rayon donné CA ou CB, I; la corde donnée BR, a; on formera une égalité dont le premier membre ſera le rang parallèle de la Table qui ſurpaſſe d'une unité le nombre des parties égales, & le ſecond ſera $\mp a$; ſçavoir $+a$ lorſque l'arc AR eſt moindre que la demie circonférence, & $-a$ lorſqu'il eſt plus grand. Or il eſt viſible ſelon l'article 443. que la réſolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ſes racines x, une valeur BD telle qu'ayant décrit du point B comme centre & de l'intervalle BD un arc de cercle, il coupera ſur l'arc donné AR la premiere des parties égales cherchées AD.

Qu'il faille, par exemple, diviſer l'arc donné AR en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \mp a$, dont l'une des racines BD terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviſer l'arc AR en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$; & de même, s'il falloit diviſer en ſept, il viendroit $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$: de ſorte que toute la difficulté ſe réduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'eſt ce qu'on a enſeigné dans le Livre précédent. Donc, &c.

Il eſt à remarquer que ces égalités ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, lorſque le nombre des parties égales eſt un nombre premier. Mais lorſqu'il eſt compoſé de deux ou pluſieurs nombres premiers, on diviſera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & enſuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des membres reſtans a d'unités, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait épuiſé tous les nombres premiers, dont le produit for-

me le nombre donné ; ce qui donnera enfin la premiere des parties égales qu'on cherche : ſi l'on veut, par exemple, diviſer l'arc AR en trente parties égales, il faudra d'abord le diviſer en cinq, enſuite la premiere de ces cinq parties en trois, & enfin la premiere de ces trois en deux, pour avoir la trentieme partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 \times 3 \times 2$.

REMARQUE I.

448. DEUX points donnés A, R, ſur la circonférence d'un cercle en déterminent non-ſeulement deux arcs, dont l'un AR eſt moindre que la demie circonférence, & l'autre ABR plus grand ; mais encore une infinité de portions, dont les unes ſont la circonférence entiere plus l'arc AR, deux fois la circonférence plus l'arc AR, trois fois la circonférence plus l'arc AR &c. & les autres ſont la circonférence entiere plus l'arc ABR, deux fois la circonférence plus l'arc ABR, trois fois la circonférence plus l'arc ABR, &c ; dont la raiſon eſt que la circonférence d'un cercle rentrant en elle-même, on peut conſidérer cette ligne courbe comme faiſant une infinité de révolutions autour d'elle-même. Si donc l'on nomme l'arc AR, d ; la circonférence entiere c ; l'arc ABR ſera $c - d$ & l'on aura ces deux ſuites, FIG. 270. 271. 272. &c.

1°. $d, c+d$ $2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d$, &c.

2°. $c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d$, &c.

qui expriment par ordre toutes les portions de circonférences terminées par les deux points A, R. Cela poſé.

Si l'arc AD eſt une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonférence ; & qu'ayant inſcrit dans le cercle un poligone $DEFGH$, &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point D, on tire de l'extrêmité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BF, BG, BH, &c :

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux ſuites, dont l'origine fixe eſt toujours au point A.

FIG. 271. Car ſoit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5}d$; il eſt clair que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH \frac{4c+d}{5}$ qui ſont les cinquiemes parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere ſuite. Or ſi l'on diviſe tel autre de ſes termes qu'on voudra par 5, il eſt viſible que le quotient renferme au juſte un certain nombre de fois la circonférence entiere plus une des cinq fractions précédentes. Donc puiſque la corde qui termine un arc, dont l'origine eſt en A, eſt la même que celle qui termine cet arc plus la circonférence répétée autant de fois qu'on veut, il s'enſuit que les cordes BD, BE, BF, BG, BH, terminent les cinquiemes parties de tous les termes de la premiere ſuite. On prouvera de la même maniere que les arcs $AH, AHG, AHGF, AHGFE, AHGFED$, ſont les cinquiemes parties des cinq premiers termes de la ſeconde ſuite, & qu'ainſi les cordes BH, BG, BF, BE, BD, terminent les cinquiemes parties de tous les termes de la ſeconde ſuite. Mais il eſt viſible que cette démonſtration ſe peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc AR. Donc, &c.

FIG. 273. 274. De-là il ſuit que ſi l'on réunit les deux ſuites précédentes en une ſeule $d, c \mp d, 2c \mp d, 3c \mp d$, &c; les deux cordes voiſines de part & d'autre de la plus grande ou premiere BD qui termine l'aliquote AD de l'arc AR moindre que la demie circonférence, termineront des aliquotes pareilles du ſecond terme $c \mp d$ de la ſuite; que les deux cordes voiſines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troiſieme terme $2c \mp d$ de la ſuite; & ainſi à l'infini de deux en deux juſqu'aux dernieres lorſque l'aliquote eſt impaire, & juſqu'à la derniere lorſqu'elle eſt paire. Ainſi lorſque l'arc $AD = \frac{1}{i}AR$; les cordes BE, BH, terminent les deux arcs ADE, AH,

cinquiemes parties du ſecond terme $c \mp d$ de la ſuite, c'eſt-à-dire de la circonférence plus l'arc AR, & de la circonférence moins cet arc ; les deux cordes BF, BG, voiſines de celles-ci termineront deux arcs $ADEF$, AHG, qui ſont les cinquiemes parties du troiſieme terme $2c \mp d$ de la ſuite : & de même lorſque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les deux cordes BE, BK, voiſines de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD terminent les deux arcs ADE, AK, qui ſont les ſixiemes parties du ſecond terme $c \mp d$; les deux cordes BF, BH, voiſines de ces deux-ci terminent les deux arcs $ADEF$, AKH, ſixiemes parties du troiſieme terme $2c \mp d$; & enfin la derniere corde BG termine les deux arcs $ADEFG$, $AKHG$, ſixiemes parties du quatrieme terme $3c \mp d$.

On entend dans les remarques ſuivantes par *cordes impaires*, celles qui étant priſes de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD, ſe trouvent dans des lieux impairs à commencer par cette plus grande ; & par *cordes paires*, celles qui étant priſes de part & d'autre de la même BD, ſe trouvent dans des lieux pairs. Ainſi lorſque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes BD, BF, BG, ſont des cordes impaires, & les cordes BE, BH, des cordes paires : & de même lorſque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les cordes BD, BF, BH, ſont des cordes impaires, & les côtés BE, BK, BG, ſont des cordes paires.

REMARQUE II.

449. SI l'arc AD eſt une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonférence ARB ; & qu'ayant inſcrit dans le cercle à commencer par le point D, un poligone $DEFGH$, &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extrêmité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BE, BF, BG, BH, &c : je dis que les cordes impaires lorſque l'arc AD eſt une aliquote impaire de l'arc AR, & leurs quar- FIG. 273. 274.

rés lorſqu'il en eſt une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur poſitive $+a$, le rang parallèle de la Table dont l'expoſant ſurpaſſe d'une unité le nombre des côtés du poligone; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le ſecond, expriment les racines vraies de l'autre égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur négative $-a$, le même rang parallèle de la Table.

FIG. 171. 273. Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; je dis que les cordes impaires BD, BF, BG, ſont les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & que les cordes paires

FIG. 172. 274. BE, BH, ſont les racines vraies de l'autre égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, ſeront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$, & les quarrés des cordes paires BE, BK, BG, ſeront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$.

Car ſi l'on propoſe de diviſer la circonférence entiere répétée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc AR, en parties égales dont la premiere ſoit moindre que la demie circonférence, il eſt clair ſelon l'article 444. qu'on formera la même Table que pour la diviſion de l'arc AR: en obſervant que les cordes doivent changer néceſſairement une fois de ſigne (avant que d'arriver à la derniere BR) lorſque la circonférence n'eſt répétée qu'une fois, parce que l'origine commune B de toutes ſe trouve ſur l'une des parties égales; que les cordes doivent changer deux fois de ſignes, lorſque la circonférence eſt répétée deux fois, parce que l'origine B ſe trouve néceſſairement ſur deux des parties égales; qu'elles doivent changer trois fois, lorſque la circonférence eſt répétée trois fois, parce que l'origine B ſe trouve ſur trois parties égales, & ainſi de ſuite. La corde BR ſera donc poſitive lorſqu'il s'agit de diviſer en parties égales l'arc AR & la circonférence répétée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc AR; & négative lorſque la circonférence

eſt répétée un nombre impair de fois : c'eſt-à-dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallèle de la Table à la grandeur poſitive $+a$. Et par conſéquent les cordes impaires ou leurs quarrés ſeront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres eſt $-a$. *Ce qu'il falloit, &c.*

REMARQUE III.

450. LES mêmes choſes étant poſées, ſi l'arc AD eſt un aliquote impaire de l'arc AR; il eſt clair par l'inſpection de la Table, que tous les termes pairs, c'eſt-à-dire, le deuxieme, quatrieme, ſixieme, &c, excepté le dernier terme a, manquent toujours dans les deux égalités qu'on trouve ſelon la remarque précédente. Or l'on ſçait en Algébre, qu'en changeant de ſignes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fauſſes & les fauſſes en vraies. D'où il ſuit que les cordes paires qui ſont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres eſt $-a$, deviendront des racines fauſſes de l'autre égalité dont l'un des membres eſt $+a$. Par exemple ſi l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes impaires BD, BF, BG, ſeront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires BE, BH, en ſeront les racines fauſſes. FIG. 271. 273.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques pluſieurs Théorêmes la plûpart entiérement nouveaux, touchant l'inſcription des poligones réguliers ; ſi l'on fait attention que la grandeur connue du ſecond terme d'une égalité renferme la ſomme de ſes racines, que celle du troiſieme terme renferme la ſomme des plans alternatifs de ſes racines, que celle du quatrieme terme renferme la ſomme des ſolides alternatifs, &c, & enfin que le dernier terme eſt égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, après avoir fait la remarque ſuivante qui peut être de quelque utilité.

REMARQUE IV.

FIG. 271. 273. 451. LES mêmes choſes étant poſées que dans la Remarque précédente, où l'on veut que l'aquilote AD de l'arc AR ſoit impaire ; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonférence ARB qui contient l'arc AR, la dernière ou plus petite BF ſoutend un arc BF qui eſt à l'arc BR, en même raiſon que l'arc AD à l'arc AR.

Car ſoit l'arc AD la cinquieme partie de l'arc AR, & par conſéquent l'arc DE la cinquieme partie de la circonférence ; il eſt clair que la demie circonférence ARB contiendra deux fois & demie l'arc DE, c'eſt-à-dire, deux fois l'arc DE ou bien l'arc DEF plus la cinquieme partie de la demie circonférence. Donc l'arc AD plus l'arc BF vaut la cinquieme partie de la demie circonférence ARB. Donc puiſque AD eſt la cinquieme partie de l'arc AR, il s'enſuit que BF ſera auſſi la cinquieme partie de l'arc BR complément à deux droits de l'arc AR. Mais ce que l'on vient de démontrer ſubſiſte avec la même force, ſoit que l'arc AD ſoit la cinquieme partie de l'arc AR, ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raiſon de dire en général, &c.

De-là on voit que ſi l'on nomme b la corde BR d'un arc quelconque BR moindre que la demie circonférence, dont le rayon eſt 1 ; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres ſoit b, & l'autre le rang parallèle de la Table qui ſurpaſſe d'une unité le nombre des parties égales dans leſquelles l'arc BR doit être diviſé : cette égalité aura pour l'une de ſes racines la corde BF de la premiere de ſes parties, & par conſéquent pour une autre de ſes racines, la corde BG de la premiere d'un pareil nombre de parties égales de l'arc BAR complément à quatre droits de l'arc BR.

THEOR. I.

THEORESME I.

452. SI *l'on inſcrit au dedans d'un cercle un poligone régulier quelconque* DEFGH, &c. *d'un nombre impaire de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque* B *de la circonférence à tous les angles du poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c: *je dis*, FIG. 271.

1°. *Que la ſomme des cordes impaires* BD, BF, BG, &c, *à commencer par la plus grande* BD *ſera toujours égale à la ſomme des cordes paires* BE, BH, &c ; *c'eſt-a-dire que la plus petite corde* BF — BE + BD — BH + DG, &c = 0.

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contient l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés, il eſt clair comme l'on vient de voir que ſi l'on nomme la corde *BR*, *a* ; & le rayon *CA* ou *CB*, 1 ; les cordes impaires *BD*, *BF*, *bG*, *&c*, ſeront les racines vraies, & les cordes paires *BE*, *BH*, *&c*, les racines fauſſes de l'égalité qui a pour l'un de ſes membres + *a*. Or puiſque le ſecond terme, qui ſelon qu'on démontre en Algébre contient la ſomme des racines, manque toujours dans cette égalité ; il s'enſuit, &c.

2°. *Que ſi l'on mene le diametre* BA, *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contient l'arc* AD *autant de fois que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR : *le produit* BD × BE × BF × BG × BH, &c. *de toutes les cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c. *les unes par les autres, ſera toujours égal au produit de la corde* BR *par une puiſſance du rayon* CA *qui ait pour expoſant le nombre des cordes* — 1.

Car ce dernier produit vaut le membre *a* ; puiſque *BR* = *a*, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon *CA*. Or comme le terme *a* eſt toujours le dernier terme de l'égalité qui a pour ſes racines toutes les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *bG*, *BH*, *&c*, & que le dernier terme d'une égalité contient toujours ſelon ce qu'on démontre en Algébre le produit de toutes ſes racines ; il s'enſuit, &c.

THEOREME II.

FIG. 275. 453. SI *l'on diviſe une demie circonférence* AEB *en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premieres ſoient l'arc* AE, *les quatre premieres l'arc* AEF, *& ainſi de ſuite de deux en deux juſqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BE, BF, &c : *je dis,*

1°. *Que la premiere de ces cordes* BE, *moins la ſeconde* BF, *plus la troiſieme, moins la quatrieme, &c, juſqu'à la derniere inclufivement; eſt toujours égale au rayon.*

2°. *Que le produit* BE×BF, &c. *de toutes les cordes les unes par les autres, eſt égale à une puiſſance convenable du rayon. Ainſi dans cet exemple où le nombre des diviſions eſt* 5, *& où il n'y a par conſéquent que deux cordes* BE, BF; *on aura* 1°. BE—BF=CA. 2°. BE×BF=$\overline{CA}^2$.

Car inſcrivant dans le cercle entier le poligone régulier *EFGH* dont le nombre des côtés ſoit égal au nombre des diviſions à commencer par le point *A*; & tirant de l'autre extrêmité *B* du diametre *AB* à tous les angles de ce poligone des cordes *BD*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, &c; il eſt clair, 1°. que la plus grande de ces cordes *BD* eſt égale au diametre *BA*, & qu'ainſi l'arc *AD* étant nul ou zéro, l'arc *AR* le ſera auſſi; d'où l'on voit que la corde *BR* ſera auſſi égale au diametre *BA*. 2°. Que les cordes *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, &c, étant priſes deux à deux ſont égales entr'elles. Or cela poſé, ſi l'on applique le Théorême précédent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc, &c.

THEOREME III.

FIG. 271. 454. SI *l'on inſcrit au dedans d'un cercle un poligone régulier quelconque* DEFGHK, &c, *dont le nombre des côtés ſoit pair; & que d'un point quelconque* B *de la circonférence, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, BK, &c : *je dis,*

1°. *Que la ſomme tant des quarrés des cordes impaires*

BD, BF, BH, *que des cordes paires* BE, BG, BK, *eſt égale au quarré du rayon* CB *pris autant de fois que le poligone a de côtés.*

Car menant le diametre BA, & prenant l'arc AR qui contienne l'arc AD autant de fois que le poligone a de côtés; il eſt clair * qu'en nommant la corde BR, a; & le rayon CA ou $CB, 1$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, &c, ſeront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres eſt $+a$; & que les quarrés des cordes paires BE, BK, BG, &c, ſeront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres eſt $-a$. Or le coëficient du ſecond terme de chacune de ces deux égalités qui contient la ſomme de leurs racines, eſt toujours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc, &c. * *Art.* 449.

2°. *Que ſi l'on mene le diametre* BA; *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne autant de fois l'arc* AD *que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR: *le produit* $\overline{BD}^{\hat{}} \times \overline{BF}^{\hat{}} \times \overline{BH}^{\hat{}}$, &c. *des quarrés des cordes impaires, eſt égal au produit de* $BA \mp BR$ *par une puiſſance convenable du rayon, ſçavoir* $BA+BR$ *lorſque le nombre des côtés du poligone eſt ſimplement pair, &* $BA-BR$ *lorſqu'il eſt pairement pair, c'eſt-à-dire, diviſible par* 4; *& le produit* $\overline{BE}^{\hat{}} \times \overline{BG}^{\hat{}} \times \overline{BK}^{\hat{}}$, &c. *des cordes paires, eſt égal au produit de* $BA \mp BR$ *par la méme puiſſance du rayon, ſçavoir* $BA-BR$ *dans le premier cas &* $BA+BR$ *dans le ſecond.*

Car nommant BR, a; & le rayon $CA, 1$; il eſt clair que les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, &c, ſont les racines d'une égalité qui a toujours pour dernier terme $2 \mp a$ c'eſt-à-dire $BA \mp BR$; & de plus que les quarrés des cordes paires BE, BG, BK, &c, ſont les racines de l'autre égalité qui a toujours pour dernier terme $2 \mp a$ c'eſt-à-dire $BA \mp BR$. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toujours le produit de toutes ſes racines, il s'enſuit, &c.

COROLLAIRE.

455. DE-LA il eſt évident, 1°. que la ſomme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, eſt égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du poligone, c'eſt-à-dire ici que $\overline{BF}^{\cdot} + \overline{BE}^{\cdot} + \overline{BD}^{\cdot} + \overline{BK}^{\cdot} + \overline{BH}^{\cdot} + \overline{BG}^{\cdot} = 12\,\overline{CA}^{\cdot}$. 2°. Que la différence des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, eſt toujours égale à zéro, c'eſt-à-dire, que $\overline{BF}^{\cdot} - \overline{BE}^{\cdot} + \overline{BD}^{\cdot} - \overline{BK}^{\cdot} + \overline{BH}^{\cdot} - \overline{BG}^{\cdot} = o$. 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, eſt égal au quadruple d'une puiſſance pareille du rayon; c'eſt-à-dire, que $\overline{BF}^{\cdot} \times \overline{BD}^{\cdot} \times \overline{BH}^{\cdot} + \overline{BE}^{\cdot} \times \overline{BK}^{\cdot} \times \overline{BG}^{\cdot} = 4\,CA^{4}$. 4°. Que la différence de ces deux produits, eſt égale au double de la corde BR multipliée par une puiſſance convenable du rayon; en obſervant que le produit du quarré des cordes impaires, ſurpaſſe celui des quarrés des cordes paires, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt ſimplement pair, & au contraire qu'il eſt moindre, lorſqu'il eſt pairement pair: c'eſt-à-dire ici, que $\overline{BF}^{\cdot} \times \overline{BD}^{\cdot} \times \overline{BH}^{\cdot} - \overline{BE}^{\cdot} \times \overline{BK}^{\cdot} \times \overline{BG}^{\cdot} = 2\,BR \times CA^{4}$. 5°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres ſera toujours égal au produit de $\overline{BA}^{\cdot} - \overline{BR}^{\cdot} = BA + BR \times BA - BR = \overline{AR}^{\cdot}$ à cauſe de l'angle droit ARB, par une puiſſance convenable du rayon: c'eſt-à-dire, en extrayant de part & d'autre les racines quarrées, que le produit de toutes les cordes eſt égal au produit de la corde AR par une puiſſance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici, $BF \times BE \times BD \times BK \times BH \times BG = AR \times CA^{5}$.

THEOREME IV.

Fig. 275. 456. SI *l'on diviſe une demie circonférence* ADB *en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere*

ſoit l'arc AD, *les trois premieres l'arc* ADE, *les cinq premieres l'arc* ADEF, *& ainſi de ſuite de deux en deux juſqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, &c: *je dis*,

1°. *Que la ſomme des quarrés de ces cordes eſt égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de diviſions. C'eſt-à-dire ici, où le nombre des diviſions eſt* 6, *que* $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6\overline{CA}^2$.

2°. *Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puiſſance convenable du rayon. Ainſi* $\overline{BD}^2 \times \overline{BE}^2 \times \overline{BF}^2 = 2CA^6$, *& par conſéquent* $BD \times BE \times BF = CA^3 \times \sqrt{2}$.

Car inſcrivant dans le cercle entier un poligone régulier *DEFGHK*, dont le nombre des côtés ſoit égal au nombre des diviſions, à commencer par la premiere *D*; & tirant de l'extrêmité *B* du diametre *AB*, à tous les angles de ce poligone, des cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*: il eſt clair que les cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, *&c*, étant priſes deux à deux ſont égales entr'elles; & partant que ſi l'on applique les articles premier & troiſieme du Corollaire précédent à ce cas particulier, on en verra naître ce Théorême.

EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone régulier quelconque, dont le nombre des côtés ſoit donné.

On peut regarder ce Problême, comme n'étant qu'un cas particulier de l'exemple précédent. Car ſi l'on ſuppoſe que la corde *BR* devienne nulle ou zéro, il s'enſuit que l'arc *AR* qu'elle termine deviendra la demie circonférence. Or ſi l'on propoſe de diviſer la circonférence entiere en un nombre quelconque de parties égales; il eſt évident qu'en diviſant la demie circonférence dans ce même nombre, & prenant la ſeconde corde au FIG. 275.

lieu de la premiere, elle terminera la premiere des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demie circonférence ADB en sept parties égales $AD, DE, EF, FG, GH, HI, IB$; la seconde corde BE terminera l'arc AE qui est la septieme partie de la circonférence entiere. D'où l'on voit qu'en égalant à zéro le rang parallèle de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone, on formera une égalité dont la plus grande des racines x exprimera la valeur de la corde BD qui termine l'arc AD moitié de l'arc cherché AE. Mais * $CB\,(1).\ BD\,(x) :: BD\,(x).\ BE + BA$, & par conséquent si l'on nomme la seconde corde BE, z; on aura $xx = z + 2$. Si donc l'on fait évanouir par le moyen de cette égalité l'inconnue x dans la précédente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine z exprimera la corde BE qui termine l'arc cherché AE. Ainsi dans notre exemple, en égalant à zéro le huitieme rang parallèle & divisant par x, je trouve cette égalité $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $z + 2$, à la place de x^4 le quarré de cette valeur, &c. je la change en cette autre $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande des racines z exprime la valeur de la corde BE qui termine l'arc AE septieme partie de la circonférence entiere.

FIG. 276.

* *Art.* 442.

Voici maintenant une maniere générale de trouver immédiatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du poligone est impair qui est le seul cas nécessaire; puisque s'il étoit pair, on le réduiroit toujours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonférence, on auroit par la bissection d'une des parties égales, réitérée autant qu'il seroit nécessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallèle étant 1, & le second $z - 1$; le troisieme $zz - z - 1$ soit égal au produit du second par z, moins le premier; le quatrieme $z^3 - zz - 2z + 1$ soit égal au pro-

duit du troiſieme par z, moins le ſecond ; & ainſi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zéro, l'autre ſoit le rang parallèle de la Table, qui ait pour expoſant la plus grande moitié du nombre des côtés du poligone. Je dis que la plus grande des racines z de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du poligone.

Table pour l'inſcription des poligones réguliers dans le cercle.

1re	1
2e	$z + 1$
3e	$zz - z - 1$
4e	$z^3 - zz - 2z + 1$
5e	$z^4 - z^3 - 3zz + 2z + 1$
6e	$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$
7e	$z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6zz - 3z - 1$
8e	$z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6zz - 4z + 1$
9e	$z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10zz + 4z + 1$
10e	$z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10zz + 5z - 1$

Qu'il faille, par exemple, inſcrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatrieme rang parallèle de la Table, parce que 4 eſt la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zéro j'ai $z^3 - zz - 2z + 1 = o$, dont la plus grande racine z exprimera la valeur de la corde BE, qui termine l'arc AE ſeptieme partie de la circonférence entiere. Pour le prouver.

Soit un arc de cercle AR moindre que la demie circonférence, diviſé en un nombre quelconque impair, de parties égales aux points D, E, F, G, &c ; & ſoient menées de l'extrêmité B du diametre BA, les cordes BD, BE, BF, BG, &c, juſqu'à la derniere BR. Ayant pris l'arc AS égal à l'arc AD, ſoit tirée la corde BS, & ſoient nommées la premiere corde BD ou BS, x ; & la ſeconde BE, z. Cela poſé, on aura ſelon le Lemme CB (1). $BE\ (z) :: BD\ (x).\ BF + BS$. Et par conſéquent $BF = xz - x$. De même CB (1). $BE\ (z) :: BF.\ BD + BH$. Et par conſéquent $BH = zBF - BD$; de

FIG. 275.

même encore $CB(1).BE(z)::BH.BF+BR$, & partant $BR=zBH-BF$: c'eſt-à-dire, que la cinquieme corde BH eſt égale au produit de la troiſieme BF par z, moins la premiere BD; que la ſeptieme BR eſt égal au produit de la cinquieme BH par z, moins la troiſieme BF; & ainſi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que ſi l'on conſtruit une Table dont le premier rang étant x, & le ſecond $xz-x$; le troiſieme $xzz-xz-x$ ſoit égal au produit du ſecond par z, moins le premier; le quatrieme $xz^3-xzz-2xz+1$ ſoit égal au produit du troiſieme par z moins le ſecond; & ainſi à l'infini : les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires BD, BF, BH, BR, de l'arc AR. Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la précédente multipliés chacun par x, il s'enſuit qu'en ſuppoſant que la derniere corde BR devienne nulle ou zéro (ce qui arrive lorſque l'arc AR devient la demie circonférence,) & faiſant ce qu'on vient de preſcrire, on aura une égalité dont l'inconnue z exprimera la ſeconde corde BE qui termine l'arc AE qui eſt contenu autant de fois dans la circonférence entiere, que l'arc AD qui en eſt la moitié, l'eſt dans la demie circonférence.

FIG. 276.

Il faut remarquer, 1°. que les égalités qu'on trouve de cette maniere ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt un nombre premier : mais que lorſqu'il eſt compoſé de deux ou de pluſieurs nombres premiers, il faudra diviſer d'abord la circonférence entiere en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & enſuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres reſtans a d'unités, & continuer juſqu'à ce que tous les nombres premiers qui compoſent le nombre donné des côtés du poligone ſoient épuiſés. 2°. Qu'entre les cordes qui partent du point B, & qui ſont renfermées dans la demie circonférence AEB; les impaires à commencer par la plus grande BE ſont les racines vraies,

vraies, & les paires les fauſſes des égalités qu'on trouve par cette méthode : ainſi les cordes BE, BI, ſont les deux racines vraies de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, & la corde BG en eſt la fauſſe. 3°. Qu'entre les racines de ces ſortes d'égalités, la plus petite eſt la corde d'un arc qui eſt la moitié de celui qu'on cherche : c'eſt-à-dire dans cette exemple, que la plus petite racine BI de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, eſt la corde d'un arc BI qui qui eſt la quatorzieme partie de la circonférence.

REMARQUE.

458. IL eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier & du ſecond rang perpendiculaire ont chacun pour coëficient l'unité ; que ceux du troiſieme & du quatrieme rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c qui ſe forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du cinquieme & du ſixieme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du ſeptieme & du huitieme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainſi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre ſupérieur qui ſe forment par l'addition continuelle de ceux du dernier ordre.

LEMME I.

459. S'IL *y a ſur un demi cercle* AEB *deux arcs égaux* AD, EF, *dont l'un* AD *ait ſon commencement en l'une des extrémités* A *du diametre* AB, *& l'autre* EF *ſoit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, *&* AD, AE, AF : *je dis*, 1°. *que* $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. 2°. *Que* $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. FIG. 277.

Car les trois triangles rectangles ADG (le point G eſt ici le point d'interſection des cordes BD, AF), AEB,

BFG ſont ſemblables entr'eux ; puiſque l'angle AGD ou BGF ayant pour meſure la moitié des deux arcs BF, AD, eſt égal à l'angle BAE qui a auſſi pour meſure la moitié des deux arcs BF, FE, ou AD. Si donc l'on nomme le diametre AB, 1 ; les cordes BD, x ; AD, y ; BE, v ; AE, z ; on aura, 1°. $BE\,(v).\ EA\,(z)::\ AD\,(y).\ DG=\frac{yz}{v}$, & partant BG ou $BD-DG=x-\frac{yz}{v}$. 2°. $AB\,(1).\ BE\,(v)::\ BG\left(x-\frac{yz}{v}\right).\ BF=vx-yz$, c'eſt-à-dire (puiſque $AB=1$) que $AB\times BF=BD\times BE-AD\times AE$. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

Maintenant $BE\,(v).\ BA\,(1)::\ AD\,(y).\ AG=\frac{y}{v}$. Et $AB\,(1).\ AE\,(z)::\ BG\left(x-\frac{yz}{v}\right).\ GF=xz-\frac{zyy}{v}$; & partant $AG+GF$ ou $AF=xz-\frac{zyy}{v}+\frac{y}{v}=xz+vy$, puiſqu'à cauſe du triangle rectangle AEB on trouve $1-zz=vv$; c'eſt-à-dire que AF ou $AB\times AF=BD\times AE+AD\times BE$. Et c'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

LEMME II.

460. SOIT *formée une Table, dont le premier rang parallèle étant compoſé de deux parties* x & y, *tous les autres le ſoient auſſi ſelon cette regle ; la premiere partie de tel rang parallèle qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallèle qui le précede immédiatement, multipliée par* x, *moins la ſeconde partie du méme rang multipliée par* y : *& la ſeconde partie vaut la méme premiere partie multipliée par* y, *plus la méme ſeconde multipliée par* x. *Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *moindre que la demie circonférence diviſé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. *Je dis que ſi le diametre* AB=1, *& les deux premieres cordes* BD=x, AD=y ; *toutes les autres cordes* BE, BF, BG, &c, *ſeront exprimées par les premieres parties du deuxieme, troiſieme, quatrieme, &c. rang parallèle, & les autres*

FIG. 278.

cordes correſpondantes AE, AF, AG, &c, *par les ſecondes parties des mêmes rangs. Ainſi* BG *étant la quatrieme corde, vaut la premiere partie* $x^4 - 6yyxx + y^4$ *du quatrieme rang parallèle, & ſa correſpondante* AG *vaut la ſeconde partie* $4yx^3 - 4y^3x$ *du même rang.*

1e	x	y
2e	$xx - yy$	$2yx$
3e	$x^3 - 3yyx$	$3yxx - y^3$
4e	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5e	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6e	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x$
7e	$x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^7 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - x^7$

Car il eſt clair ſelon le Lemme précédent que le produit d'une corde quelconque BF par la premiere corde BD (x), moins le produit de la corde correſpondante AF, par l'autre premiere corde AD (y) exprime la valeur de la corde BG qui ſuit immédiatement BF; & auſſi que la corde AG vaut $BF \times AD\,(y) + AF \times BD\,(x)$. Donc, &c.

COROLLAIRE.

461. SI l'on ajoute enſemble les deux parties de chaque rang parallèle de la Table précédente, en mettant par ordre tous les termes qui les compoſent ſelon les différens degrés des puiſſances de x; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puiſſances du binome $x + y$: en obſervant que le premier & le ſecond terme doivent être pris affirmativement, le troiſieme & le quatrieme négativement, & ainſi alternativement de deux en deux juſqu'au dernier. Ainſi le troiſieme rang parallèle contiendra $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$; c'eſt-à-dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers négativement: de même le cinquieme rang parallèle contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui eſt la cinquieme

puiſſance du binome $x+y$, dont le premier & le ſecond terme ſont pris affirmativement, le troiſieme & le quatrieme négativement, le cinquieme & le ſixieme affirmativement ; & il en eſt ainſi de tous les autres rangs à l'infini.

1e	$x+y$
2e	$xx+2yx-yy$
3e	$x^3+3yxx-3yyx-y^3$
4e	$x^4+4yx^3-6yyxx-4y^3x+y^4$
5e	$x^5+6yx^4-10yyx^3-10y^3x+5y^4x+y^5$
6e	$x^6+6yx^5-15yyx^4-20y^3x^3+15y^4xx+6y^5x-y^6$
7e	$x^7+7yx^6-21yyx^5-35y^3x^4+35y^4x^3+21y^5xx-7y^6x-y^7$

Car ſi l'on fait attention à la maniere dont la Table précédente eſt formée, on verra que tous les termes de chacun de ſes rangs parallèles ſont formés par ceux du rang parallèle qui le précede, multipliés par x & par y, & joints par des ſignes $+$ & $-$, en telle ſorte que les termes des deux parties qui compoſent chaque rang, étant mis par ordre, ſelon les différens degrés de l'inconnue x, il y a de ſuite deux ſignes $+$, & après deux ſignes $-$; & ainſi alternativement juſqu'au dernier.

REMARQUE.

462. IL eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du troiſieme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du quatrieme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, 20, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainſi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un

ordre supérieur, se forment par l'addition continuelle de ceux de l'ordre immédiatement précédent.

EXEMPLE XII.

463. UN arc de cercle AR étant donné; le diviser en autant de parties égales qu'on voudra, aux points $D, E, F, G, \&c$; par une méthode différente de celle de l'exemple dixieme. PLC. 178.

Ayant nommé le diametre $AB, 1$; les cordes données BR, a; AR, b; qui terminent l'arc donné AR; & les cordes inconnues BD, x; AD, y; qui terminent l'arc cherché AD; on élevera le binome $x+y$ à une puissance dont l'exposant soit égal au nombre des divisions. On formera deux égalités, dont la premiere aura pour l'un de ses membres la donnée a, & pour l'autre tous les termes impairs de la puissance de $x+y$, joints par des signes $+$ & $-$ alternatifs; & la seconde aura pour l'un de ses membres la donnée b, & pour l'autre tous les autres termes de la même puissance du binome $x+y$, joints encore ensemble par des signes alternatifs $+$ & $-$. On fera évanouir l'une ou l'autre des inconnues x ou y, par le moyen de l'égalité $xx=1-yy$ ou $yy=1-xx$, qui se tire du triangle ADB rectangle en D: ce qui donnera enfin une derniere égalité où il n'y aura qu'une seule inconnue x ou y, dont la résolution fournira la valeur de cette inconnue BD ou AD qui termine l'arc cherché AD.

Qu'il faille, par exemple diviser l'arc cherché AR en sept parties égales, aux points D, E, F, G, H, I. Je prends la septieme puissance $x^7+7yx^6+21yyx^5+35y^3x^4+35y^4x^3+21y^5xx+7y^6x+y^7$ du binome $x+y$, de laquelle je forme les deux égalités $a=x^7-21yyx^5+35y^4x^3-7y^6x$, & $b=7yx^6-35y^3x^4+21y^5xx-y^7$. Et faisant évanouir dans la premiere de ces deux égalités l'inconnue y, ou dans la seconde l'inconnue x, par le moyen de l'égalité $yy=1-xx$ ou $xx=1-yy$,

je forme l'une de ces deux nouvelles égalités $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^7$, qui ne renferme plus qu'une ſeule inconnue, & dont la réſolution qui ſe fera ſelon les regles du Livre précédent, fournira pour l'une de ſes racines x ou y, une valeur BD ou AD qui ſervira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela eſt une ſuite des deux articles précédens.

Il eſt à remarquer que ſi l'arc AR étoit plus grand que la demie circonférence, celle des deux égalités précédentes qui a pour l'un de ſes membres $+b$ ſert également ſans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+a$ en $-a$; dont la raiſon eſt que la corde BR (a) paſſant de l'autre côté du point B devient négative de poſitive qu'elle étoit, au lieu que la corde AR ne repaſſant point de l'autre côté du point A demeure toujours poſitive.

LEMME I.

464. QUE *dans un quarré quelconque de cellules on rempliſſe de la lettre* a, *toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre* b, *toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere; & enſuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'eſt à ſçavoir qu'une cellule doit toujours être égale à celle qui eſt au-deſſus plus à celle qui eſt à gauche: de cette ſorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela poſé;*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	a	a	a	a	a	a	a
2.	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	$6a+b$
3.	b	$a+2b$	$3a+3b$	$6a+4b$	$10a+5b$	$15a+6b$	$21a+7b$
4.	b	$a+3b$	$4a+6b$	$10a+10b$	$20a+15b$	$35a+21b$	$56a+28b$
5.	b	$a+4b$	$5a+10b$	$15a+20b$	$35a+35b$	$70a+56b$	$126a+84b$
6.	b	$a+5b$	$6a+15b$	$21a+35b$	$56a+70b$	$126a+126b$	$252a+210b$
7.	b	$a+6b$	$7a+21b$	$28a+56b$	$84a+126b$	$210a+252b$	$462a+462b$

Je dis qu'une cellule quelconque eſt égale à la cellule qui

eſt à gauche plus à toutes celles qui ſont au-deſſus : c'eſt-à-dire, par exemple, que la quatrieme cellule $4a+6b$ *du troiſieme rang perpendiculaire, eſt égale à la cellule* $a+3b$ *qui eſt à gauche, & qui par conſéquent eſt la quatrieme du ſecond rang perpendiculaire, plus à toutes les autres* $a+2b$, $a+b$, a, *qui ſont au-deſſus d'elle dans ce ſecond rang.*

Car ſuppoſant que a, c, d, e, expriment les quatre premieres cellules du ſecond rang perpendiculaire, & a, f, g, h, les quatre premieres du troiſieme rang, on aura par la formation du quarré de cellules $h=e+g$, $g=d+f$, $f+c+a$, & partant $h=e+d+c+a$; ce qu'il falloit prouver. Or il eſt viſible que cette démonſtration ſe peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voiſins. Donc, &c.

COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallèle & celle du premier rang perpendiculaire, ſont compoſées de deux termes dans le premier deſquels ſe trouve la lettre a, & dans le ſecond la lettre b; il s'enſuit, 1°. que le terme où ſe trouve la lettre a, eſt égal au terme où ſe trouve la même lettre a dans la cellule à gauche, plus à tous les termes où elle ſe rencontre dans les cellules qui ſont au-deſſus de celle-ci. 2°. Que le terme où ſe trouve la lettre b, eſt égal au terme où ſe trouve la même lettre b dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle ſe trouve dans les cellules qui ſont au-deſſus. Ainſi le terme $15a$ de la cinquieme cellule du quatrieme rang perpendiculaire, eſt égal au terme $5a$ de la cellule à gauche, plus aux termes $4a$, $3a$, $2a$, $1a$, qui ſe trouvent dans les cellules qui ſont au-deſſus de celle-ci; & de même $20b$ eſt égal au terme $10b$ de la cellule à gauche, plus aux termes $6b$, $3b$, $1b$, de toutes les cellules qui ſont au-deſſus.

LEMME II.

466. *Si l'on multiplie le terme où ſe trouve la lettre* a *dans une cellule quelconque, par la ſomme des expoſans de ſon rang parallèle & de ſon rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on diviſe le produit par l'expoſant de ſon rang perpendiculaire moins* 1; *je dis que le quotient ſera égal à ce terme plus à tous ceux qui ſont au-deſſus de lui : c'eſt-à-dire, par exemple, que ſi l'on multiplie le terme* 15 *a de la cinquieme cellule du quatrieme rang perpendiculaire par* $5+4-2=7$, *& qu'on diviſe le produit par* $4-1=3$; *le quotient* 35 *a ſera égal au terme* 15 *a plus à tous les autres* 10 *a*, 6 *a*, 3 *a*, 1 *a*, *qui ſont au deſſus de lui.*

Cela eſt viſible dans toutes les cellules du deuxieme rang perpendiculaire, puiſqu'elles contiennent toutes le même terme 1 *a*. Or je vais démontrer que ſuppoſé que cette propriété ſe rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle ſe trouve néceſſairement dans celui qui eſt à droit; d'où il ſuivra que puiſqu'elle ſe trouve dans le deuxieme rang perpendiculaire, elle ſera auſſi dans le troiſieme, que puiſqu'elle ſe rencontre dans le troiſieme, elle ſera auſſi dans le quatrieme, & ainſi de ſuite à l'infini. Pour le prouver.

Soient a, e, c, d, e, f, &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où ſe trouve la lettre a, dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; a, g, h, k, l, &c un pareil nombre de termes du rang qui eſt à droit à commencer auſſi par le premier. Soit de plus m égale à la ſomme des expoſans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallèle de la cellule où ſe trouve le terme f; & r égale à l'expoſant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la ſuppoſition $\frac{m}{r} f = f+e+d+c+a =$ * l, $\frac{m-1}{r} e = e+d+c+a = k$, $\frac{m-2}{r} d = d+c+a = h$, $\frac{m-3}{r} c = c+a = g$, $\frac{m-4}{r} a = a$. Donc $l+k+h+g+a = \frac{m}{r} f$

* *Art.* 464.

+

$+\frac{m-1}{r}e+\frac{m-2}{r}d+\frac{m-3}{r}c+\frac{m-4}{r}a=\frac{m}{r}\times f+e$ $+d+c+a$, $-\frac{1}{r}\times 1e+2d+3c+4a=\frac{m}{r}l$, $-\frac{1}{r}\times k$ $+h+g+a$ en mettant pour $f+e+d+c+a$ ſa valeur l, & pour $1e+2d+3c+4a$ ſa valeur $k+h$ $+g+a$: tranſpoſant d'une part l & de l'autre $-\frac{1}{r}\times k$ $+h+g+a$, on aura $\frac{r+1}{r}\times k+h+g+a=\frac{m-r}{r}l$: multipliant de part & d'autre par r, diviſant par $r+1$, & ajoutant de part & d'autre l, il vient enfin $\frac{m+1}{r+1}l=l$ $+k+h+g+a$. Mais comme le rang perpendiculaire de la cellule où ſe trouve l, ſurpaſſe d'une unité celui de la cellule où ſe trouve f, & que leur rang parallèle demeure le même ; il eſt évident que la propriété marquée pour chaque terme où ſe trouve la lettre a dans un rang perpendiculaire quelconque, convient auſſi au terme l du rang perpendiculaire qui eſt à droit. De plus puiſque cette démonſtration ſubſiſte également tel que puiſſe être le nombre de termes des deux rangs perpendiculaires voiſins, il s'enſuit que ce que l'on vient de montrer par rapport au terme l, ſera vrai auſſi à l'égard de tout autre de ſon rang perpendiculaire.

Si l'on ſuppoſe à préſent que n exprime en général l'expoſant d'un rang parallèle quelconque autre que le premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne renferme aucun terme où la lettre a ſe rencontre ; que la ſeconde renferme toujours $1a$; que ſi l'on multiplie $1a$ par $\frac{n+1-1}{1-1}=\frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1}a$ pour le terme où ſe trouve la lettre a dans la troiſieme cellule ; & de même que ſi l'on multiplie $\frac{n}{1}a$ par $\frac{n+2-1}{2-1}=\frac{n+1}{2}$, on aura $\frac{n}{1}a\times\frac{n+1}{2}$ pour le terme où ſe trouve a dans la quatrieme cellule : de ſorte que cette ſuite 0, $1a$, $\frac{n}{1}a$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}a$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{3}a$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+3}{4}a$, &c, exprimera

par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre a, dans les cellules du rang parallèle dont n eſt l'expoſant. Ainſi ſi $n=5$, la ſuite $0, 1a, 5a, 15a, 35a$, &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre a dans les cellules du cinquieme rang parallèle.

LEMME III.

467. SI *l'on multiplie le terme où ſe trouve la lettre* b *dans une cellule quelconque, par la ſomme des expoſans de ſon rang parallèle & de ſon rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on diviſe le produit par l'expoſant de ſon rang perpendiculaire; je dis que le quotient ſera égal à ce terme plus à tous ceux qui ſont au-deſſus de lui : c'eſt-à-dire, par exemple, que ſi l'on multiplie le terme* 10b *de la cinquieme cellule du troiſieme rang perpendiculaire par* $5+3-2=6$, *& qu'on diviſe le produit par* 3, *on aura* 20b *pour la ſomme du terme* 10b, *& de tous les autres* 6b, 3b, 1b, *qui ſont au-deſſus de lui :*

Il eſt viſible que cette propriété ſe rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur $1b$, excepté la premiere dans laquelle la lettre b ne ſe rencontre point. Or de cela ſeul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme précédent à l'égard des termes qui ſont multiples de, a, qu'elle ſe doit rencontrer dans le ſecond rang perpendiculaire, dans le troiſieme, dans le quatrieme, & ainſi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que ſi n déſigne l'expoſant d'un rang parallèle quelconque autre que le premier; la ſuite $1b, \frac{n-1}{1}b, \frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}b, \frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}b, \frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}b$, &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre b dans les cellules du rang parallèle dont n eſt l'expoſant. Ainſi ſi $n=5$, la ſuite $1b, 4b, 10b, 20b, 35b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve b dans le cinquieme rang parallèle.

COROLLAIRE.

468. IL ſuit de ces deux derniers Lemmes, que ſi l'on ajoute par ordre tous les termes de cette ſuite à ceux de la précédente, on en formera une, $1b, 1a, +\frac{n-1}{1}b, \frac{n}{1}a+\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}b, \frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}a+\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}b, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n+2}{3}a\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}b$, *&c ;* ou en abrégeant l'expreſſion, $b, a+\frac{n-1}{1}b, a+\frac{n-1}{2}b\times\frac{n}{1}a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}, a+\frac{n-1}{4}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ *&c.* qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallèle de la Table dont n eſt l'expoſant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette ſuite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les expoſans de ſon rang parallèle & perpendiculaire étant donnés ; puiſque prenant dans la ſuite générale le terme qui répond à l'expoſant du rang perpendiculaire, c'eſt-à-dire, le quatrieme terme, ſi le rang perpendiculaire eſt le quatrieme, le cinquieme, s'il eſt le cinquieme &c, & mettant dans ce terme à la place de n l'expoſant du rang parallèle, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquieme cellule du quatrieme rang perpendiculaire ; ayant mis dans le quatrieme terme $a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, à la place de n l'expoſant 5 du rang parallèle de la cellule, on trouvera $a+\frac{4}{3}b\times 15$, c'eſt-à-dire, $15a+20b$ pour cette cellule ; & il en eſt ainſi de toutes les autres.

LEMME IV.

469. SI *l'on fait* $a=2$ *&* $b=1$ *dans le quarré de cellules de l'article* 464, *on le changera en celui-ci ; duquel je dis que le premier rang parallèle contient de ſuite les premiers termes de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article* 443 ; *le ſecond rang parallèle, les*

seconds termes ; le troiſieme rang, les troiſiemes termes, & ainſi de ſuite à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela eſt une ſuite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464. expliquée dans ce même article & dans le ſuivant 465.

COROLLAIRE.

470. SI l'on fait $b=1$ & $a=2$ dans la ſuite générale de l'article 468. b, $a+\frac{n-1}{1}b$, $a+\frac{n-1}{2}b\times\frac{n}{1}$, $a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $a+\frac{n-1}{4}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ &c ; on la changera en cette autre 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+3}{2}\times\frac{n}{1}$, $\frac{n+1}{3}\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $\frac{n+7}{4}\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coëficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, ſon rang perpendiculaire & le quantieme qu'il y occupe étant donnés. Voici la regle.

On prendra dans cette ſuite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'eſt-à-dire le troiſieme, ſi c'eſt le troiſieme rang, le quatrieme, ſi c'eſt le quatrieme, &c ; & ayant mis dans ce terme à la place de n le nombre qui expoſe le quantieme du terme dans ſon rang perpendiculaire, c'eſt-à-dire 4 s'il eſt le quatrieme, 5, s'il eſt le cinquieme &c, on aura le coëficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coëficient du quatrieme terme $14x^3$ du troiſieme rang perpendicu-

laire ; on mettra dans le troiſieme terme $\frac{n+1}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coëficient cherché.

Car l'expoſant du rang perpendiculaire du coëficient pris dans la Table de l'article 443, eſt le même que l'expoſant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article précédent ; & le quantieme que ce coëficient occupe dans ſon rang perpendiculaire, eſt l'expoſant du rang parallèle du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'eſt qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier où $a = 2$ & $b = 1$.

LEMME V.

471. SI *l'on met* 1 *à la place de* b, *dans le quarré de cellules de l'article* 464; *on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle* Figurés : *ſçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui ſont les unités, le ſecond rang les nombres naturels ou du ſecond ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des unités, le troiſieme rang les nombres triangulaires ou du troiſieme ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des naturels, le quatrieme les nombres piramidaux ou du quatrieme ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainſi à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	210	462	924

Car ſelon le même article 464, chaque cellule eſt

égale à celle qui eſt à gauche, plus à toutes les autres qui ſont au-deſſus.

M. Paſchal a fait un Traité qui a pour Titre Triangle Arithmétique, dans lequel il conſidere les propriétés de ces nombres, & fait voir qu'ils ſont d'un très-grand uſage dans pluſieurs queſtions d'Arithmétique.

COROLLAIRE.

472. SI l'on fait $a=1$ & $b=1$ dans la ſuite générale de l'article 468. b, $a+\frac{n-1}{1}b$, $a+\frac{n-1}{2}b\times\frac{n}{1}$, $a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $a+\frac{n-1}{4}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ &c; on changera en cette autre 1, n, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+3}{4}$ &c, qui ſervira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, ſon ordre étant donné avec le quantieme qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette derniere ſuite le terme qui répond à l'ordre donné, c'eſt-à-dire le troiſieme, ſi c'eſt le troiſieme ordre, le quatrieme, ſi c'eſt le quatrieme ordre &c; & ayant mis à la place de n le nombre qui expoſe le quantieme nombre du figuré, c'eſt-à-dire 4, s'il doit être le quatrieme, 5, s'il doit être le cinquieme &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple, trouver le cinquieme nombre du quatrieme ordre; je mets dans le quatrieme terme $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ de la ſuite à la place de n le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'eſt autre choſe que l'application de la regle de l'article 468. à ce cas particulier.

PROBLEME I.

473. SOIT *propoſé de trouver une ſuite générale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallèle quelconque, de la Table de la diviſion des arcs de l'article* 443.

Comme le troiſieme terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toujours au premier du rang qui eſt à droit; il s'enſuit que ſi $m+1$ exprime en général l'expoſant du rang parallèle, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coëficient du terme dont le quantieme eſt $m+1$; dans le deuxieme, le coëficient du terme dont le quantieme eſt $m+1-2$ ou $m-1$; dans le troiſieme, le coëficient du terme dont le quantieme eſt $m-1-2$ ou $m-3$, & ainſi de ſuite en diminuant toujours de 2 le quantieme du terme, à meſure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc ſelon la regle de l'article 470. mettre dans le ſecond terme $\frac{n+1}{1}$ à la place de n le nombre $m-1$; dans le troiſieme terme $\frac{n+3}{2}\times\frac{n}{1}$ à la place de n le nombre $m-3$; dans le quatrieme terme $\frac{n+5}{3}\times\frac{n+1}{2}$ à la place de n le nombre $m-5$; dans le cinquieme $\frac{n+7}{4}\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ à la place de n le nombre $m-7$; &c: ce qui donnera pour la ſuite des coëficiens $1, m, \frac{m}{2}\times\frac{m-3}{1}, \frac{m}{3}\times\frac{m-5}{1}\times\frac{m-4}{2}, \frac{m}{4}\times\frac{m-7}{1}\times\frac{m-6}{2}\times\frac{m-5}{3}$, &c. Or comme les ſignes des termes d'un rang parallèle quelconque de la Table ſont toujours alternatifs; & que le premier terme eſt toujours l'inconnue x élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui du rang parallèle; & que tous les autres termes renferment des puiſſances de x dont les expoſans diminuent continuellement de 2, en obſervant que $x^0=1$: il s'enſuit qu'on aura $x^m - m\,x^{m-2} + \frac{m}{2}\times\frac{m-3}{1}\,x^{m-4} - \frac{m}{3}\times\frac{m-5}{1}\times\frac{m-4}{2}\,x^{m-6} + \frac{m}{4}\times\frac{m-7}{1}\times\frac{m-6}{2}\times\frac{m-5}{3}\,x^{m-8}$ &c, pour l'expreſſion générale du rang parallèle de la Table, dont l'expoſant eſt $m+1$. Ce qui étoit propoſé.

Lorſqu'on a les premiers termes de ces ſortes de ſuites, il eſt facile d'obſerver la loi qui y regne par tout,

& qui ſert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on ſuppoſe, par exemple, dans celle-ci, que r exprime le quantieme du terme dont on veut avoir le coëficient ; il ſera exprimé par la fraction générale $\frac{m\times m-r\times m-r-1\times m-r-2\ \&c}{r-1\times r-2\times r-3\times r-4\ \&c}$, en obſervant que le numérateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r-1$ contient d'unités. Ainſi ſi $r=5$, on aura pour le coëficient du cinquieme terme, la fraction $\frac{m\times m-5\times m-6\times m-7}{4\times 3\times 2\times 1}$: ſi $r=4$, on aura $\frac{m\times m-4\times m-5}{3\times 2\times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette ſuite eſt toujours déterminé, de ſorte qu'il eſt égal à la plus grande moitié de l'expoſant du rang parallèle qu'elle exprime, lorſque cet expoſant eſt impair, & à ſa moitié au juſte lorſqu'il eſt pair. Ainſi elle n'a que trois termes, lorſqu'elle exprime le cinquieme ou le ſixieme rang parallèle, elle n'en a que quatre, lorſqu'elle exprime le ſeptieme ou le huitieme rang parallèle, &c.

PROBLEME II.

474. SOIT *propoſé de trouver une ſuite générale, qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallèle qu'on voudra, de la Table de l'inſcription des poligones réguliers de l'article* 457.

Comme le ſecond terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui eſt à droit, il s'enſuit * que ſi $m+1$ eſt l'expoſant d'un rang parallèle quelconque de cette Table, les coëficiens des quatre premiers termes de ce rang ſeront 1, 1, $m-1$, $m-2$; le coëficient du cinquieme terme ſera le nombre triangulaire dont le quantieme eſt $m-3$, c'eſt-à-dire * $\frac{m-3}{1}\times\frac{m-2}{2}$; celui du ſixieme rang ſera le nombre triangulaire dont le quantieme eſt $m-4$, c'eſt-à-dire $\frac{m-4}{1}\times\frac{m-3}{2}$; celui du ſeptieme terme ſera le nombre piramidal

* *Art.* 458.

* *Art.* 472.

midal dont le quantieme eſt $m-5$, c'eſt-à-dire $\frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui du huitieme terme ſera le nombre piramidal dont le quantieme eſt $m-6$, c'eſt-à-dire $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuvieme terme ſera le nombre du cinquieme ordre dont le quantieme eſt $m-7$, c'eſt-à-dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainſi à l'infini. Si donc l'on joint à ces coëficiens les puiſſances de z qu'ils affectent, en faiſant précéder le ſecond & le troiſieme terme du ſigne —, le quatrieme & le cinquieme du ſigne +, le ſixieme & le ſeptieme du ſigne —, & ainſi alternativement de deux en deux; on aura cette ſuite générale $z^m - z^{m-1} - m-1\, z^{m-2} + m-2\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, qui exprime par ordre tous les termes du rang parallèle de la Table de l'article 457 dont l'expoſant eſt $m+1$: où l'on doit obſerver de ne prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités.

PROBLEME III.

475. TROUVER *une ſuite générale, qui exprime par ordre, les coëficiens de tous les termes, de tel rang parallèle qu'on voudra, de la Table de l'article* 460; *ou* (*ce qui eſt la méme choſe*) *d'une puiſſance quelconque du binome* $x+y$.

Soit en général m l'expoſant d'un rang parallèle quelconque de cette Table, il eſt clair que les coëficiens des deux premiers termes de ce rang ſeront toujours * 1, m; & comme le ſecond terme de chaque rang perpendiculaire à commencer par le ſecond, répond au premier terme du rang qui eſt à droit, il s'enſuit que le coëficient du troiſieme terme du rang parallèle ſera * * *Art.* 462. * *Art.* 462.

le nombre triangulaire dont le quantieme eſt $m-1$, c'eſt-à-dire * $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatrieme terme ſera le nombre piramidal dont le quantieme eſt $m-2$, c'eſt-à-dire $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquieme terme ſera le nombre du cinquieme ordre dont le quantieme eſt $m-3$, c'eſt-à-dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$; & ainſi à l'infini. On aura donc pour la ſuite générale qu'on demande $1, m, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

* *Art.* 472.

COROLLAIRE.

476. DE-LA il ſuit que $x \mp y^n = x^m \mp \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} y y x^{m-2} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} \ldots + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c.

PROBLEME IV.

477. TROUVER *une équation générale qui ſerve à diviſer un arc de cercle donné* AR, *en autant de parties égales qu'on voudra.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 279. Soit en général m le nombre des parties égales, l'arc AD la premiere de ces parties; ſoit tiré le diametre AB, & les cordes BD, BR; & ſoit le rayon CA ou $CB=1$, la corde donnée $BR=a$, la corde cherchée $BD=x$. On aura * $\mp a = x^m - m x^{m-2} + \frac{m \times m-3}{1 \times 2} x^{m-4} - \frac{m \times m-5 \times m-4}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times m-7 \times m-6 \times m-5}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$ &c, (ſçavoir $+a$ lorſque l'arc donné AR eſt moindre que la demie circonférence, & $=a$ lorſqu'il eſt plus grand)

* *Art.* 444. 473.

pour l'équation générale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre m lorſqu'il eſt pair, ou ſa plus grande moitié lorſqu'il eſt impair contient d'unités ; parce que le terme qui ſuivroit ſeroit nul ou zéro.

Si $m=5$, il vient $\overline{+}a=x^5-5x^3+5x$; ſi $m=7$, on trouve $\overline{+}a=x^7-7x^5+14x^3-7x$.

SECONDE MANIERE.

Soit tiré le diametre AB, & les cordes BR, AR, BD, AD, qui terminent l'arc donné AR, & l'arc cherché AD. Soit m le nombre des parties égales, le diametre $AB=1$, les cordes données $BR=a$, $AR=b$; & les cordes inconnues $BD=x$, $AD=y$. On aura * ces deux égalités générales $\overline{+}a=x^m$ * *Art.* 463. 475.

$$-\frac{m\times m-1}{1\times 2}yy\,x^{m-2}+\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3}{1\times 2\times 3\times 4}y^4x^{m-4}\ \&c,$$

$$b=\frac{m}{1}y\,x^{m-1}-\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}y^3x^{m-3}+\ \ldots$$

$$\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3\times m-4}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}y^5x^{m-5}\ \&c\ ;$$

dans leſquelles mettant à la place de m, le nombre de parties égales dans leſquelles l'arc AR doit être diviſé, il en vient deux autres particulieres, dont la réſolution fournit la valeur cherchée de la corde $BD\,(x)$ ou $AD\,(y)$, après avoir fait évanouir l'inconnue y ou x, par le moyen de l'équation $yy=1-xx$ ou $xx=1-yy$.

Soit par exemple $m=7$. On aura $\overline{+}a=x^7-21yyx^5+35y^4x^3-7y^6x$, & $b=7yx^6-35y^3x^4+21y^5xx-y^7$, & l'on achevera le reſte comme dans l'article 462.

PROBLEME V.

478. TROUVER *une équation générale, qui ſerve à inſcrire dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque* ADEFGHK &c. FIG. 280.

Soit tiré le diametre AB, & la corde BD qui terminent le premier côté du poligone ; ſoit le rayon

donne CA ou $CB=1$, la corde inconnue $BD=z$, & en général m la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je ſuppoſe être impair. On aura* $o=z^m-z^{m-1}-\overline{m-1}\,z^{m-2}+\overline{m-2}\,z^{m-3}+\frac{m-3}{1}\times\frac{m-2}{2}z^{m-4}-\frac{m-4}{1}\times\frac{m-3}{2}z^{m-5}-\frac{m-5}{1}\times\frac{m-4}{2}\times\frac{m-3}{3}z^{m-6}+\frac{m-6}{1}\times\frac{m-5}{2}\times\frac{m-4}{3}z^{m-7}+\frac{m-7}{1}\times\frac{m-6}{2}\times\frac{m-5}{3}\times\frac{m-4}{4}z^{m-8}$ &c, pour l'équation générale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités, parce que celui qui ſuivroit ſeroit nul ou zéro.

* *Art.* 457. 474.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inſcrire, on aura $m=3$; & partant $o=z^3-zz-2z+1$, dont la plus grande racine z exprimera la corde BD, qui termine l'arc AD, qui a pour corde le premier côté AD du poligone. De même ſi le nombre des côtés eſt 11, on aura $m=5$; & par conſéquent l'équation générale devient $o=z^5-z^4-4z^3+3zz+3z-1$, dont la plus grande des racines eſt $z=BD$.

PROBLEME VI.

FIG. 281. 282.

479. DIVISER *un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un inſtrument.*

1°. Soit propoſé de diviſer l'angle donné ECF en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés ſoient mobiles autour de ſes quatre angles, & duquel les deux côtés AB, AD, ſoient indéfiniment prolongés vers X & Z; attacher l'angle C du rhombe, dans le ſommet C de l'angle donné ECF; marquer ſur les côtés CE, CF, les points E, F, enſorte que CE & CF ſoient égales chacune au côté CB ou CD ou DA ou AB du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou reſſerrer les côtés AX, AZ, de l'angle BAD, enſorte qu'ils paſſent par les points E, F; &

l'angle BAD ſera la troiſieme partie de l'angle ECF.

Car les triangles ABC, BCE, étant iſoſcelles, l'angle externe CBE ou ſon égal CEB, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, BCA, ſera double de l'angle BAC; & dans le triangle ECA, l'angle externe ECY, qui vaut l'angle CEA plus l'angle BAC, ſera triple de l'angle BAC. On démontrera de même que l'angle FCY eſt triple de l'angle DAC. D'où il ſuit que l'angle donné ECF eſt triple de l'angle BAD. *Ce qu'il falloit, &c.*

2°. Soit propoſé de diviſer l'angle donné HGK, en cinq parties égales. On attachera dans l'angle C du rhombe $ABCD$ de l'inſtrument précédent, un autre rhombe $CEGF$, dont les côtés ſeront égaux à ceux du premier & mobiles auſſi autour de leurs angles. On fichera l'angle G de ce dernier rhombe, dans le ſommet G de l'angle donné HGK; & ayant pris ſur les côtés de cet angle les parties GH, GK, égales chacune au côté GE de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera l'angle XAZ mobile autour du point A, enſorte que ſes côtés AX, AZ, touchent les angles E, F, & paſſent en même tems par les points marqués H, K. Je dis que l'angle XAZ ou BAD ſera la cinquieme partie cherchée de l'angle donnée HGK. FIG. 283. 284.

Car ayant mené dans le rhombe $ABCD$ la diagonale AC, prolongée indéfiniment vers Y; elle paſſera par le point G, puiſque les angles ECY, FCY, étant triples des angles égaux, BAC, DAC, ſeront auſſi égaux entr'eux. Or dans le triangle EGA, l'angle externe HEG, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, EGA, ou ECY (à cauſe du triangle iſoſcelle CEG) ſera quadruple de l'angle BAC. Et partant dans le triangle AHG, l'angle externe HGY, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, GHA ou GEH (à cauſe du triangle iſoſcelle EGH) ſera le quintuple de l'angle BAC. On prouvera de même que l'angle KGY ſera quintuple de l'angle DAC; d'où il eſt évident

que l'angle entier HGK ſera quintuple de l'angle entier BAD ou XAZ.

S'il falloit diviſer un angle donné en ſept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes précédens, un troiſieme rhombe égal & conſtruit de la même maniere ; & ainſi de ſuite de deux en deux. Car la pratique & la démonſtration ſe fera toujours de la même maniere.

EXEMPLE.

480. TROUVER entre deux lignes données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnue x la premiere des moyennes proportionnelles qu'il eſt queſtion de trouver ; & l'on aura la progreſſion géométrique continue $a, x, \frac{xx}{a}, \frac{x^3}{aa}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantieme ſurpaſſe de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée b on formera une égalité, dont la réſolution fournira la valeur de l'inconnue x qui eſt la premiere des moyennes proportionnelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progreſſion géométrique le quatrieme terme $\frac{x^3}{aa}$, qui étant égale à la ligne b, donne $x^3 = aab$; & de même ſi l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4 b$. D'où il eſt facile de voir que ſi n marque en général le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données a & b, on aura $x^{n+1} = a^n b$ pour l'égalité générale qu'il faut réſoudre. Or cela poſé.

Soit 1°. $x^{17} = a^{16} b$ qui ſert à trouver ſeize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par x^3, afin d'avoir $x^{20} = a^{16} bx^3$, dont la plus haute dimenſion 20 eſt le produit des deux nombres 4 & 5 qui ſe ſuivent immédiatement. Je prends

l'équation $x^4 = a^4 y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puiſſance quatrieme $x^{20} = a^{16} y^4 = a^{16} b x^4$, d'où je tire une autre équation $y^4 = b x^4$, dont le lieu étant conſtruit ſéparément, donnera par ſon interſection avec celui de la ſuppoſée $x^7 = a^4 y$, la valeur de l'inconnue x. Ou bien je prends l'équation $x^4 = a^3 y$, dont j'éleve chaque membre à la quatrieme puiſſance ; & les multipliant enſuite par x, j'ai $x^{17} = a^{12} y^4 x = a^{16} b$, d'où je tire $y^4 x = a^4 b$, dont le lieu étant conſtruit ſéparément avec celui de l'équation $x^4 = a^3 y$, donnera par ſon interſection la valeur cherchée de l'inconnue x.

Soit 2°. $x^{31} = a^{30} b$ qui ſert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par x^5, afin d'avoir $x^{36} = a^{30} b x^5$, dont la plus haute dimenſion 36 eſt le quarré de 6 : c'eſt pourquoi faiſant $x^6 = a^5 y$, & prenant de part & d'autre la ſixieme puiſſance, j'ai $x^{36} = a^{30} y^6 = a^{30} b^5$, d'où je tire $x^6 = b^5$, dont le lieu étant conſtruit ſéparément avec celui de l'équation que j'ai priſe d'abord $x^6 = a^5 y$, donnera par ſon interſection la valeur de l'inconnue x. Ou bien ayant pris comme ci-deſſus l'équation $x^6 = a^5 y$, je l'éleve à la cinquieme puiſſance, & la multipliant enſuite par x, j'ai $x^{31} = a^{25} y^5 x = a^{30} b$, ce qui donne $y^5 x = a^5 b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x^6 = a^5 y$, étant conſtruit ſéparément avec le lieu de l'autre équation $y^5 x = a^5 b$, donnera la réſolution de l'égalité propoſée $x^{31} = a^{30} b$; de ſorte que l'on peut choiſir entre les deux lieux $y^6 = b x^5$, ou $y^5 x = a^5 b$, celui qu'on jugera le plus ſimple. Il en eſt ainſi de tous les autres exemples qu'on peut ſe former à plaiſir.

Il eſt à remarquer que ſi la dimenſion de l'inconnue x n'étoit pas un nombre premier, l'égalité propoſée ſe pourroit toujours abaiſſer. Si l'on avoit, par exemple, $x^9 = a^8 b$, qui ſert à trouver huit moyennes proportionnelles, on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x^3 = \sqrt[3]{a^8 b}$. Or afin que le nombre $a^8 b$ ſoit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne z dont le

cube $z^3 = aab$, ou ce qui eſt la même choſe de trouver entre a & b deux moyennes proportionnelles ; car mettant à la place de aab ſa valeur z^3, on aura $x^9 = a^6 z^3$ ou $x^3 = a^2 z$, de ſorte qu'en réſolvant ces deux égalités $z^3 = aab$, & enſuite $x^3 = aaz$ qui ne ſont que du troiſieme degré, on trouvera la valeur de l'inconnue x, qui eſt la premiere des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes a & b. De même ſi l'on avoit $x^{14} = a^{13} b$ qui ſert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendroit en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^7 = \sqrt{a^{13} b}$. Or afin que $\sqrt{a^{13} b}$ ſoit un quarré, il faut trouver une ligne z dont le quarré $zz = ab$; car ſubſtituant à la place de ab, le quarré zz dans l'égalité propoſée, on aura $x^{14} = a^{12} zz$ ou $x^7 = a^6 z$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à réſoudre d'abord l'égalité du ſecond degré $zz = ab$, & enſuite celle du ſeptieme $x^7 = a^6 z$.

On doit encore remarquer que ces ſortes d'égalités qui ſervent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimenſion de l'inconnue eſt un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires ; dont la raiſon eſt qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la premiere des moyennes proportionnelles cherchées.

REMARQUE.

FIG. 285. 481. ON peut réſoudre le Problême précédent par le moyen d'un inſtrument géométrique dont la conſtruction eſt telle. Soient deux lignes indéfinies XY, YZ, mobiles autour du point Y, enſorte qu'elles ſe puiſſent ouvrir & fermer. Soit attachée à un point quelconque fixe B du côté YX, une perpendiculaire indéfinie BC ſur ce côté, laquelle chaſſe devant elle (pendant que l'angle XYZ s'ouvre) par le point C où elle rencontre l'autre côté YZ, la perpendiculaire indéfinie CD ſur ce dernier côté ; qui chaſſe de même par

par le point D où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire indéfinie DE; qui chaſſe encore de même par le point E où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire indéfinie EF; qui chaſſera par le point F où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire FG; qui chaſſe encore par le point G où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire GH; & ainſi de ſuite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires ſur les côtés YX & YZ. Cela fait, ſoit propoſé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données a & b. Ayant pris ſur le côté YZ la partie YG quatrieme proportionnelle aux trois lignes a, b, YB, on ouvrira le côté XY de l'inſtrument, juſqu'à ce que la cinquieme perpendiculaire FG (parce qu'il eſt queſtion de trouver quatre moyennes proportionnelles) paſſe par le point G; & alors les lignes YC, YD, YE, YF, ſeront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes YB, YG; & partant la quatrieme proportionnelle aux trois lignes YB, YC, a ſera la premiere des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles YBC, YCD, YDE, YEF, YFG, étant tous ſemblables; leurs côtés YB, YC, YD, YE, YF, YG, ſeront en progreſſion géométrique continue. Donc, &c.

Il eſt clair que pendant que l'angle XYZ s'ouvre de plus en plus, le point B décrit un arc de cercle AB; & que les interſections continuelles D, F, H, des perpendiculaires CD, EF, GH, ſur le côté YZ, avec l'autre côté YX, décrivent des lignes courbes AD, AF, AH, qui ſervent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car ſi l'on décrit, par exemple, du diametre YE un demi cercle, il coupera la courbe AD en un point D, tel que YD eſt la ſeconde des deux moyennes proportionnelles, entre les

trêmes YB ou YA & YE ; & de même si l'on décrit un demi cercle du diametre YG, il coupera la ligne courbe AF en un point F, tel que YF est la derniere des quatre moyennes proportionnelles entre YA & YG &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe AD est du quatrieme degré ; la ligne courbe AF du huitieme ; la courbe AH du seizieme &c ; ce que je prouve ainsi.

Soient 1°. les inconnues & indéterminées $YC=x$, $CD=y$, $YD=z$, & la connue YA ou $YB=a$, on aura à cause des triangles rectangles semblables YCD, YBC, cette équation $YB\ (a)=\frac{xx}{z}$, & à cause du triangle rectangle YCD cette autre $yy+xx=zz$, dans laquelle mettant à la place de z sa valeur $\frac{xx}{a}$ trouvée par le moyen de la premiere équation, il vient $aayy=x^4-aaxx$; ce qui fait voir que la courbe AD est un lieu du quatrieme degré. Soient 2°. les inconnues & indéterminées $YE=x$, $EF=y$, $YF=z$, & la connue YA ou $YB=a$; on aura à cause des triangles rectangles semblables YFE, YED, YDC, YCB, cette équation $YB\ (a)=\frac{x^4}{z^3}$, & à cause du triangle rectangle YEF cette autre $yy+xx=zz$, dans laquelle faisant évanouir l'inconnue z par le moyen de la premiere équation, & ôtant les incommensurables, on trouve $aay^6+3aaxxy^4+3aax^4yy+aax^6=x^8$; d'où l'on voit que la courbe AF est un lieu du huitieme degré. On prouvera de même que la courbe AH est un lieu du seizieme degré &c.

Maintenant puisque selon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du second degré ; quatre moyennes proportionnelles, en se servant d'un lieu du second degré, & d'un autre du troisieme ; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatrieme, qui

eſt la ligne AD, & un lieu du ſecond qui eſt le cercle YDE; & dans le ſecond un lieu du huitieme, ſçavoir; la ligne courbe AF, & un lieu du ſecond, ſçavoir le cercle YFG: il s'enſuit que ces lignes courbes AD, AF, AH, ſont beaucoup trop compoſées pour réſoudre ce Problême. Cependant la facilité de la conſtruction, & de la démonſtration, récompenſe en quelque ſorte ce défaut.

FIN.

016432

APPROBATION.

J'AI lu par ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, *le Traité analytique des Sections Coniques, de M. le Marquis de l'Hôpital.* C'eſt un ouvrage ſi généralement eſtimé, que l'on ne peut qu'applaudir au zele de ceux qui vont en donner une nouvelle édition. A Paris, le 22 Janvier 1776. MARIE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: SALUT. Notre amé le ſieur MOUTARD, Libraire, nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public, un Ouvrage qui a pour titre: *Traité analytique dee Sections Coniques, par M. le Marquis de l'Hôpital;* s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons déſenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance: comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucuns Extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelle; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères; conformément aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725; à peine de déchéance du préſent Privilége. Qu'a-

Digitized by Google

vant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès-mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur HUE DE MIROMESNIL; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique; un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre trer-cher & féal Chevalier, Chancelier de France le Sieur de MAUPEOU, & un dans celle dudit Sieur HUE DE MIROMESNIL; le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant ou ſes ayans cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la Copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers, Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent, ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le quatorziéme jour du mois de Février, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-ſeize, & de notre Regne le deuxieme.

Par le Roi en ſon Conſeil. *Signé*, LEBEGUE.

Regîtré ſur le Regître XX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 3069, fol. 99. conformément au Réglement de 1723. A Paris, ce 23 Février 1776.

LAMBERT, *Adjoint.*

TABLE.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole. page 1

LIVRE SECOND.

De l'Ellipſe. 19

LIVRE TROISIEME.

De l'Hyperbole. 47

LIVRE QUATRIEME.

Des trois Sections Coniques. 87

LIVRE CINQUIEME.

De la Comparaiſon des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens. 122

LIVRE SIXIEME.

Des Sections Coniques conſidérées dans le Solide. 166

LIVRE SEPTIEME.

Des Lieux Géométriques. 206

LIVRE HUITIEME.

Des Problémes indéterminés. 249

LIVRE NEUVIEME.

De la Conſtruction des Egalités. 291

LIVRE DIXIEME.

Des Problémes déterminés. 362

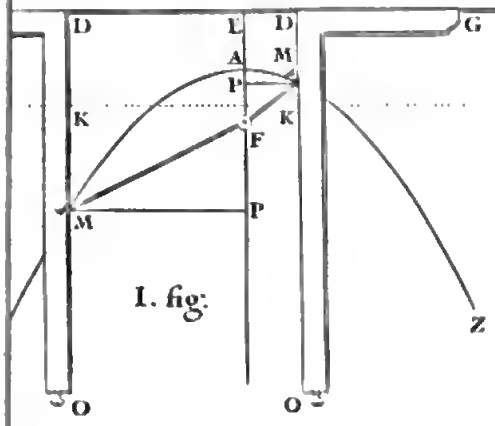
FIN.

LIVRES DE SCIENCES

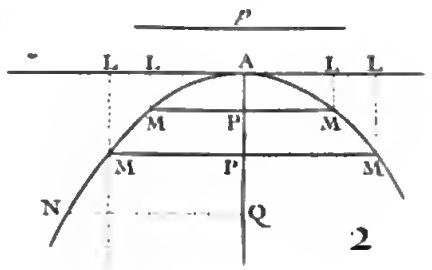
Qui ſe trouvent chez le méme Libraire.

Joan. Keill Introductiones ac veram Phyſicam & Aſtronomicam. *Mediolani*, 1742. in-4. fig. 15 l.
S'Graveſande Phyſices Elementa Mathematica, 2 vol. in-4. 30 l.
Neutonii Opuſcula Mathemat. 3 vol. in-4. 36 l.

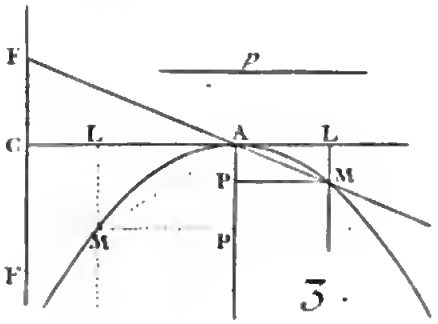
Phyſique de Muſchenbrock, revue par M. Sigaud de la Fond, 3 vol. in-4. fig. 36 l.
Œuvres de M. de Maupertuis, 4 vol. in-8. 20 l.
Aſtronomie Nautique, par le même, in-8. 4 l.
Analyſe démontrée du P. Raynault, 2 vol. in-4. fig. 18 l.
La Science du calcul, du même, in-4. 12 l.


D
L
D
G
A
M
P
K
K
F
M
P
O
O
Z

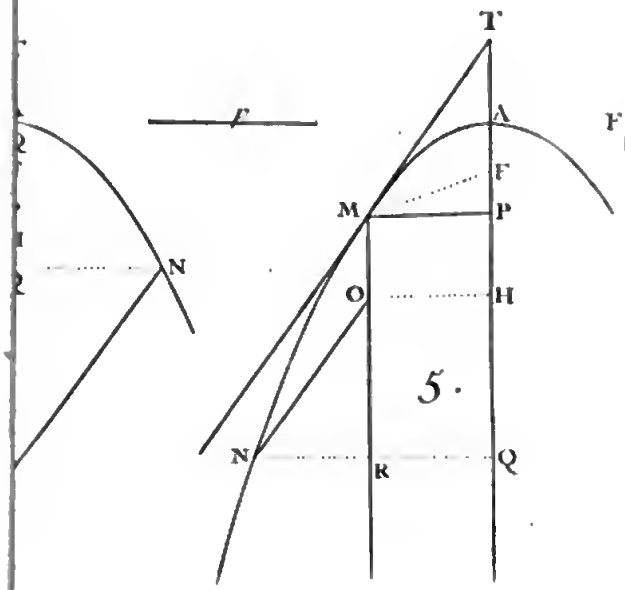
1. fig:


p
L
L
A
L
L
M
P
M
M
P
M
N
Q

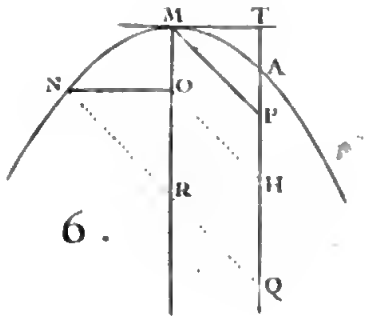
2


F
p
C
L
A
L
P
M
M
P
F

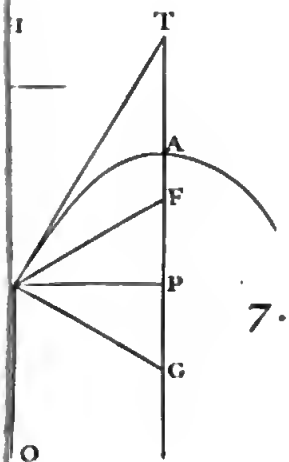
3.


T
A
F
M
P
O
H
N
R
Q

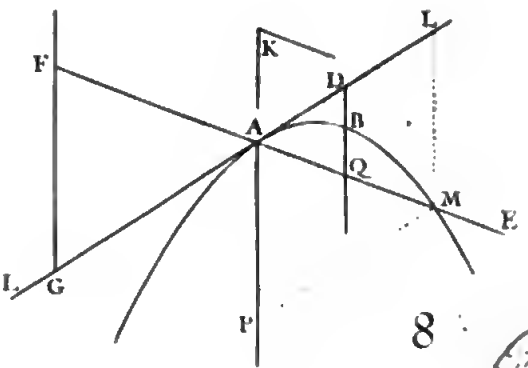
5.


M
T
N
O
A
P
R
H
Q

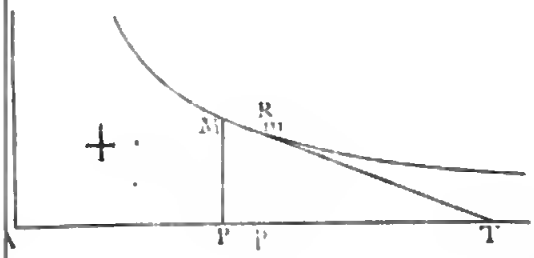
6.

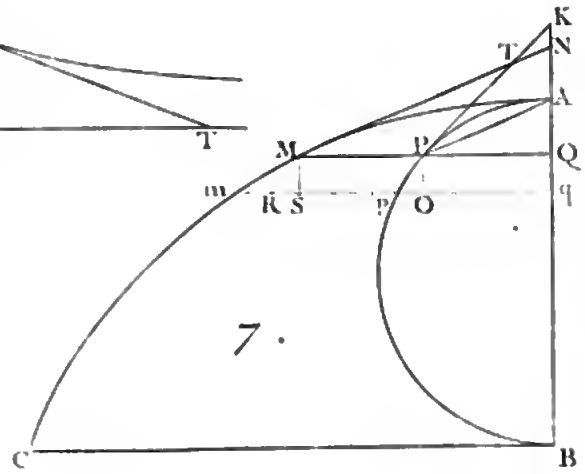

T
A
F
P
G
O

7.

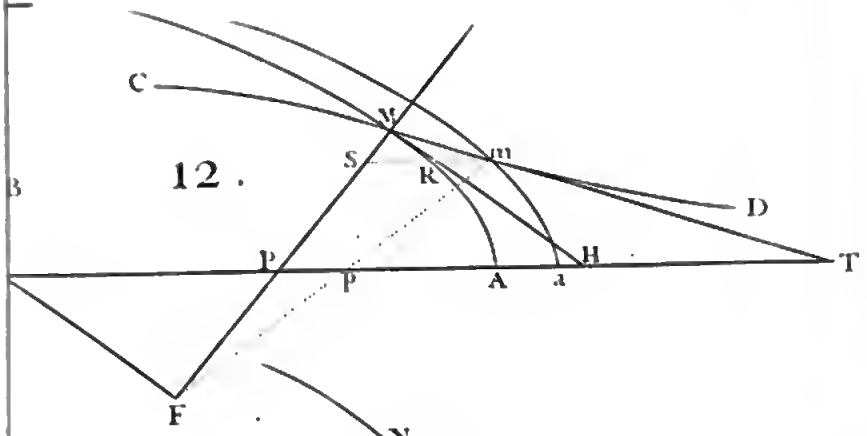

L
K
F
D
A
B
Q
M
E
L
G
P

8.

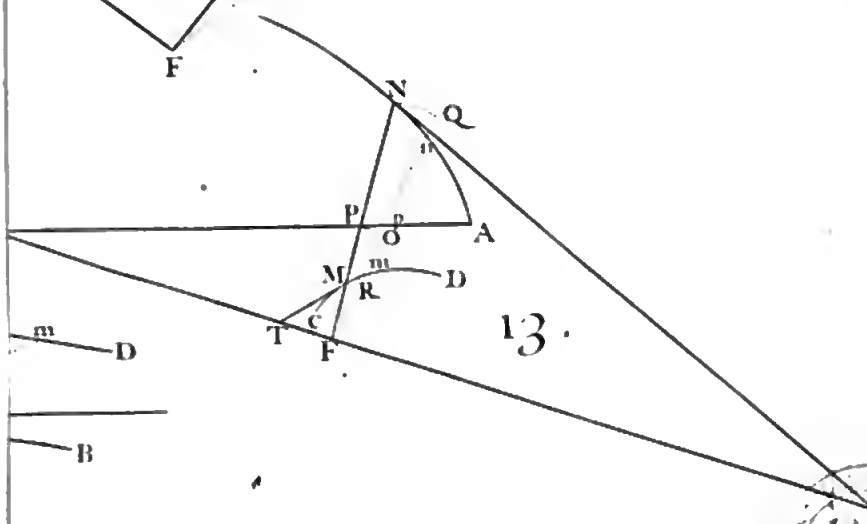




7.

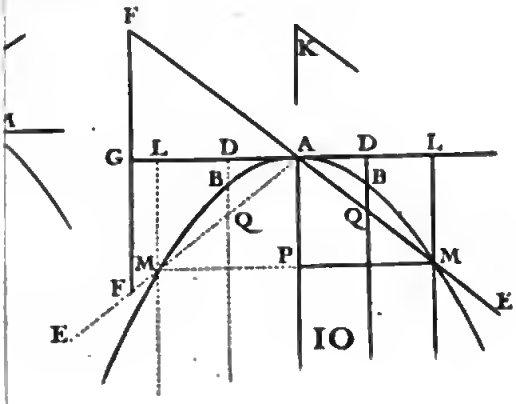


12.

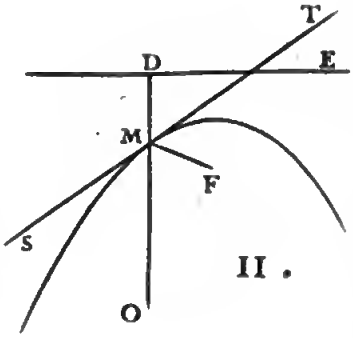


13.

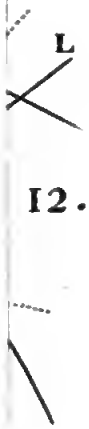
Gravé par Berey



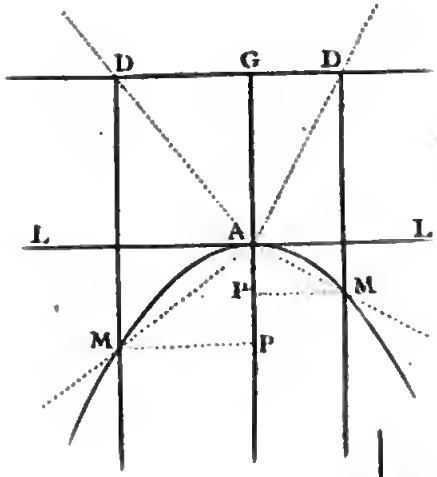
10.



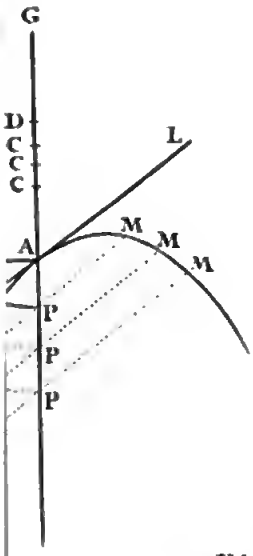
11.

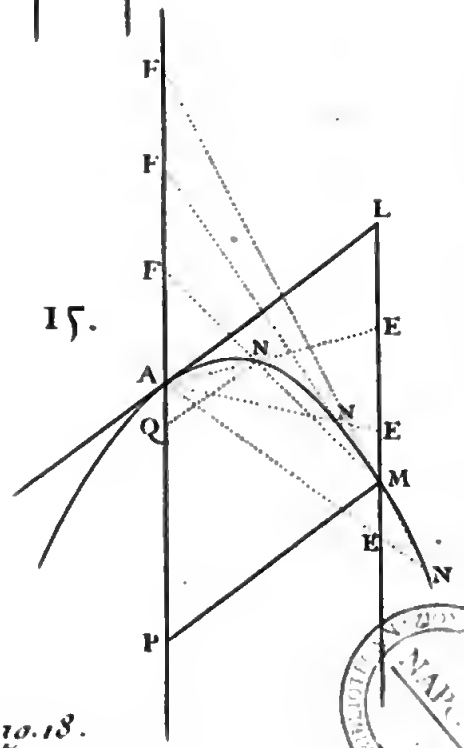


12.



13.

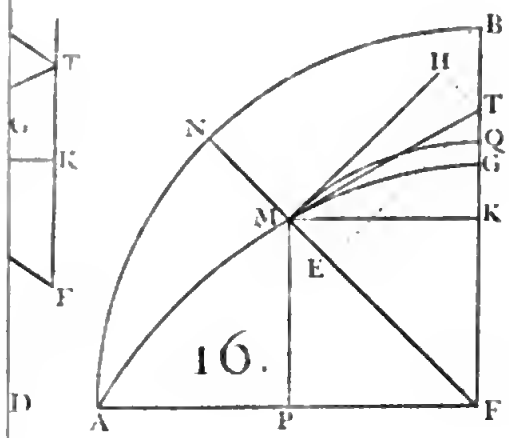




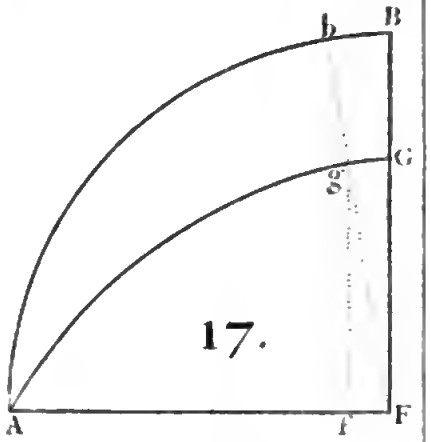
15.

Planche 2. pag. 18.

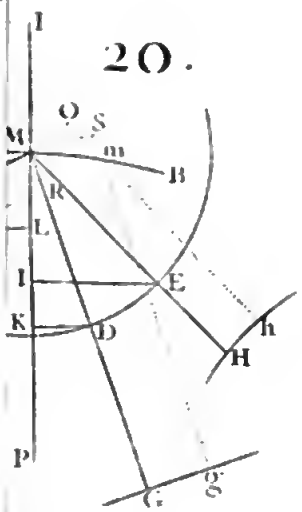
Pag. 32



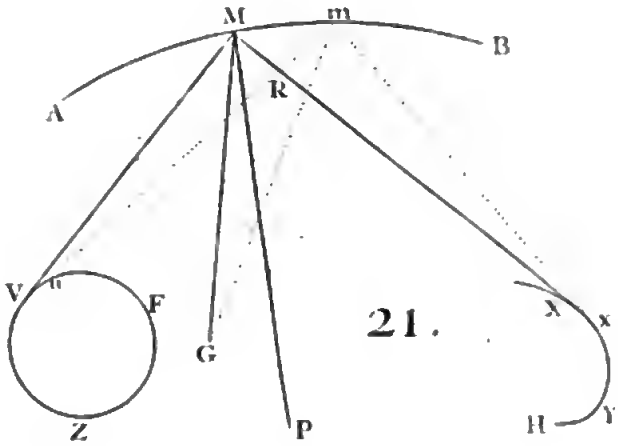
16.



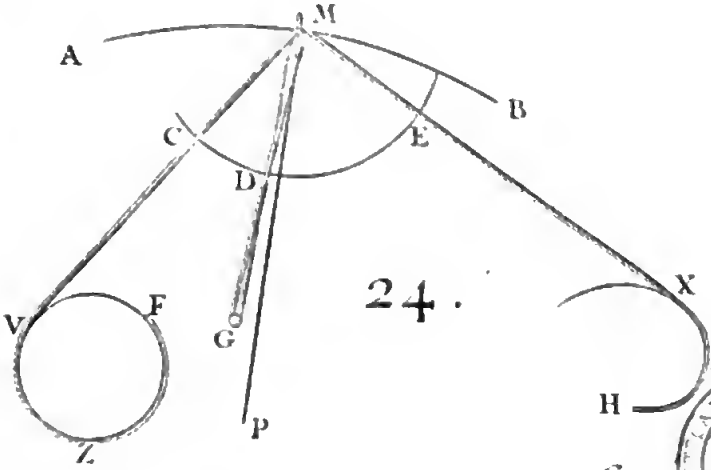
17.



20.

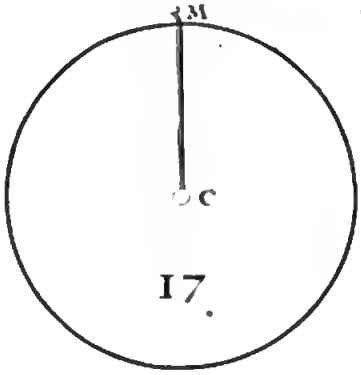


21.

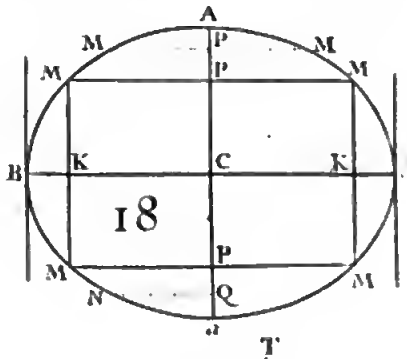


24.

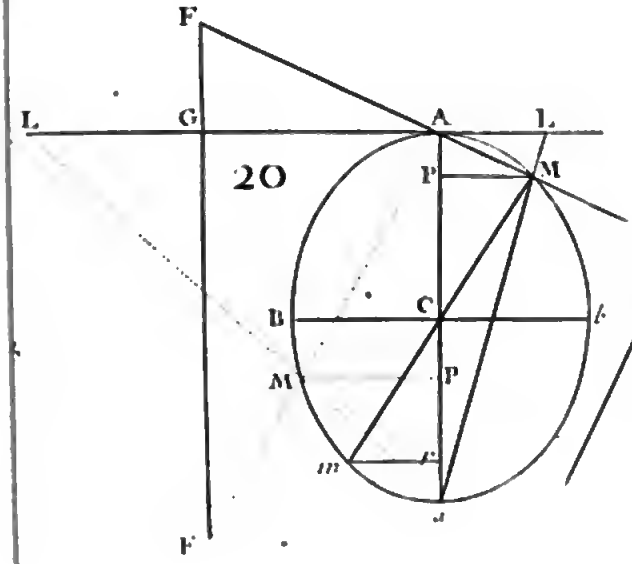
Gravé par Boyer



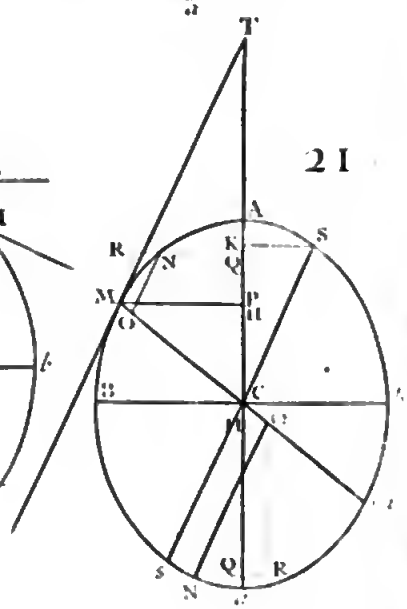
17.



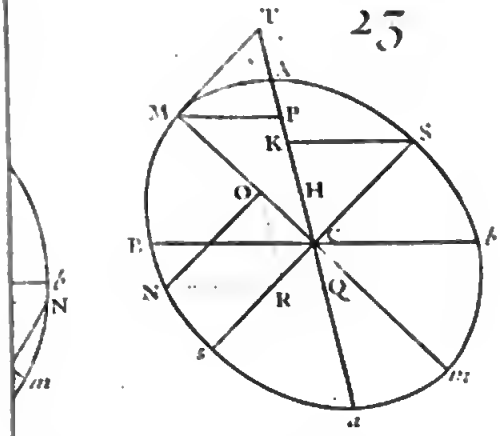
18



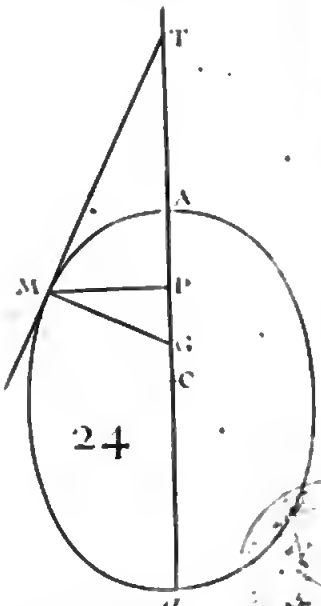
20



21



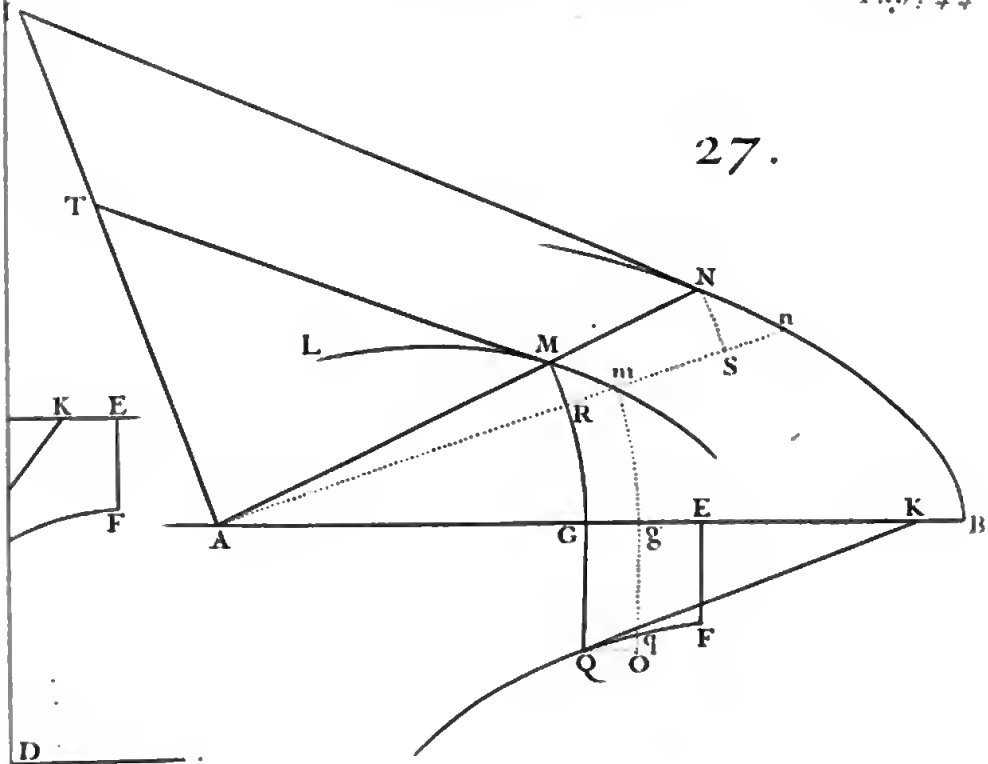
23

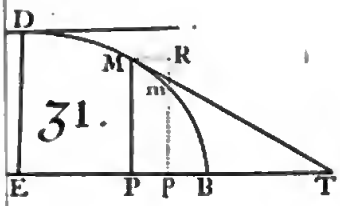


24

Planche 3. pag. 34.

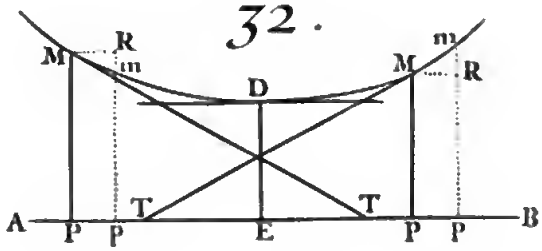
27.

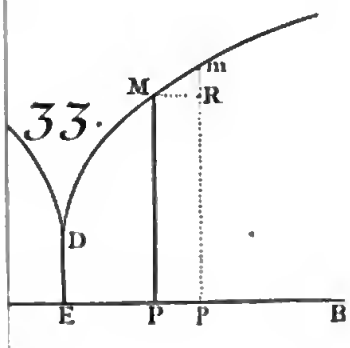




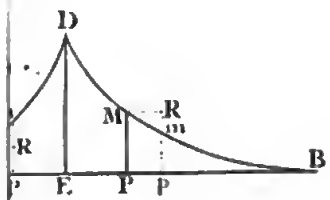
31.

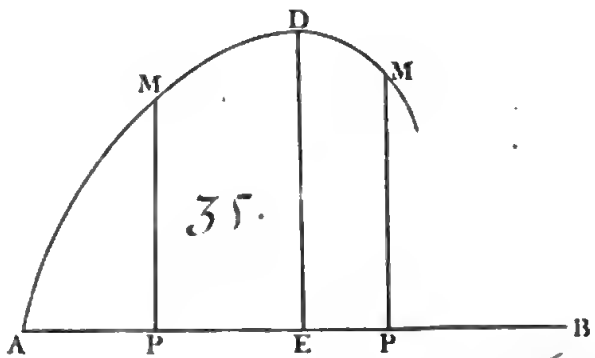
32.





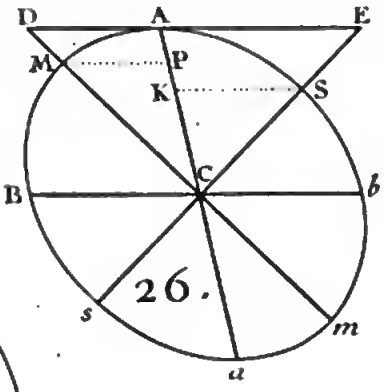
33.

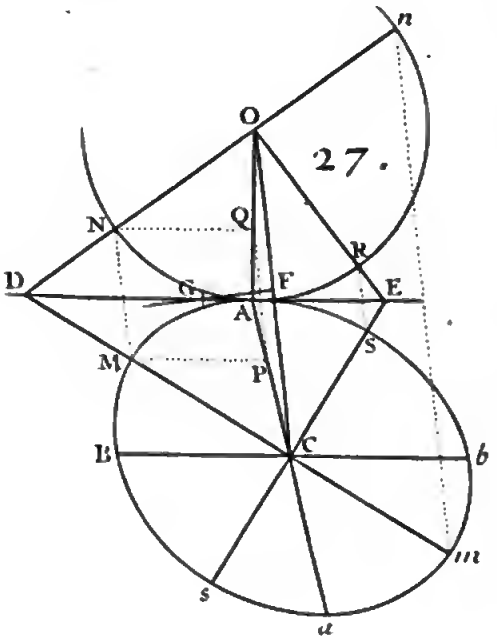


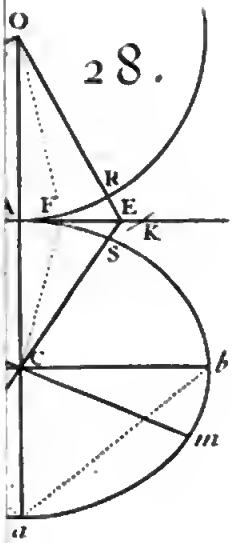


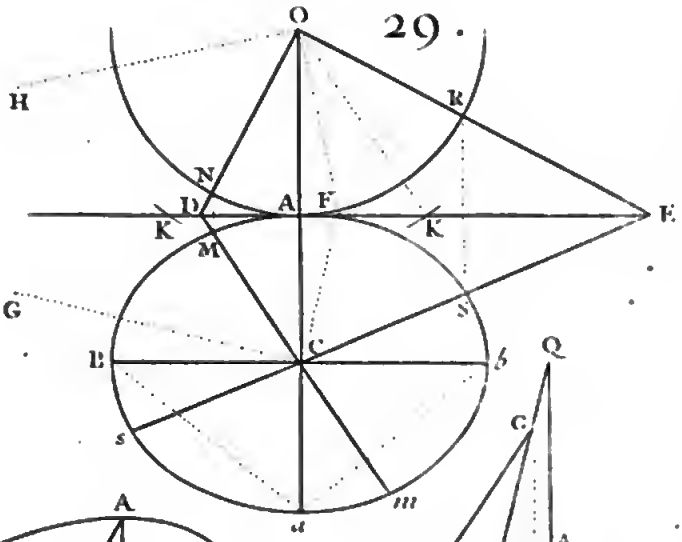
35.

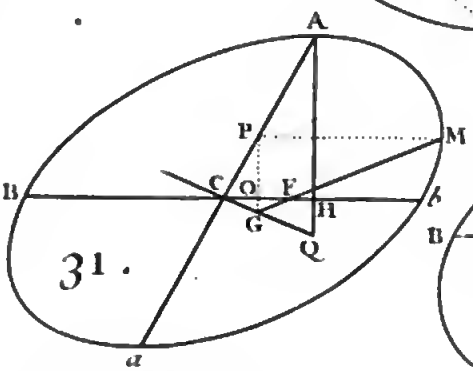
Gravé par Berey











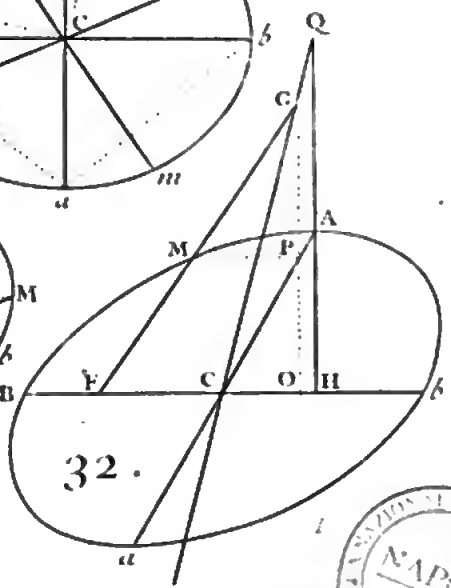
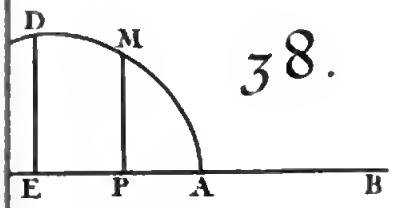


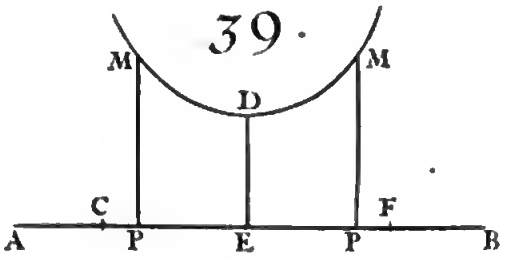
Planche 4. pag. 44

Digitized by Google

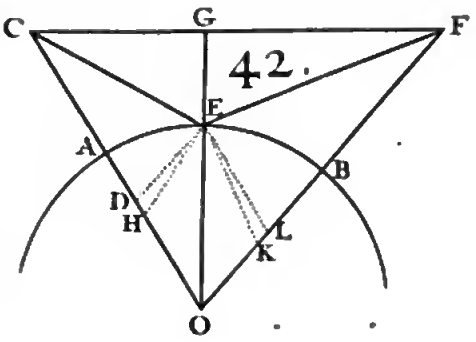
38.



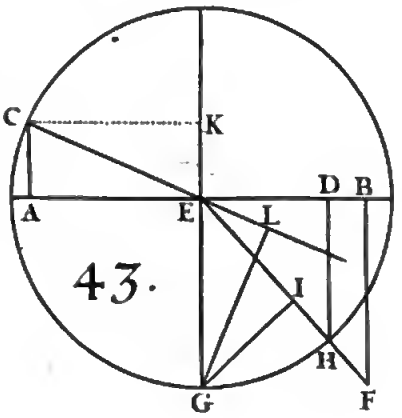
39.



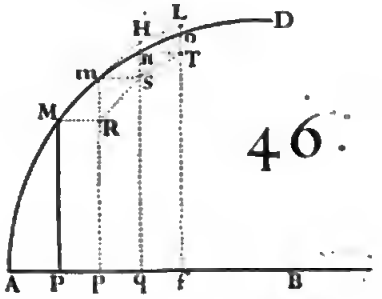
42.



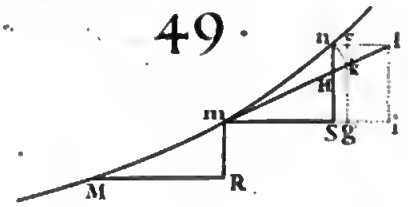
43.



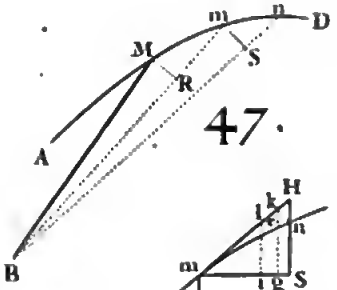
46.



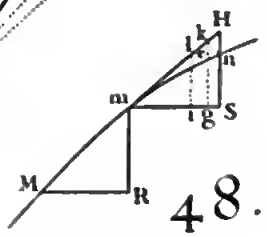
49.



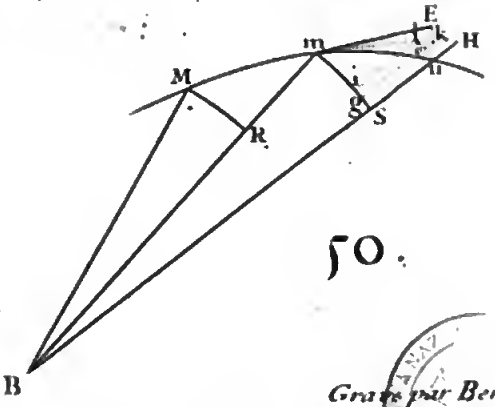
47.



48.

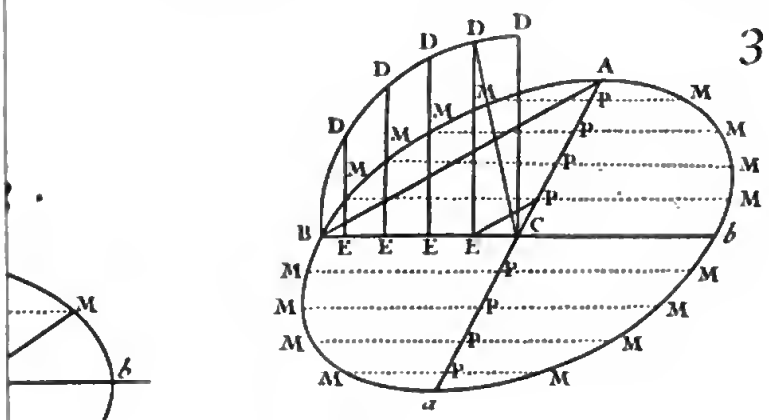


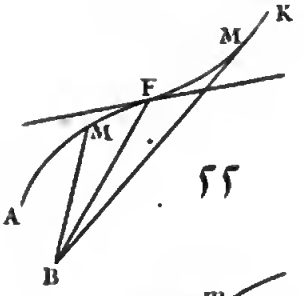
50.



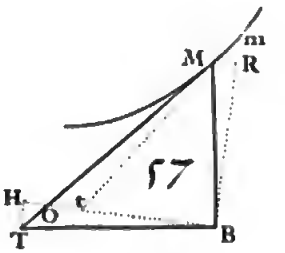
Grave par Berey

Digitized by Google


35.
D D D D D D
A
M M M

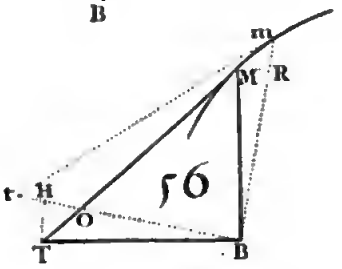


55

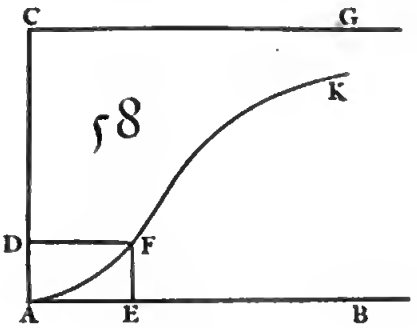


57

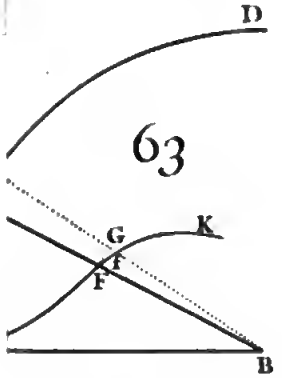
B



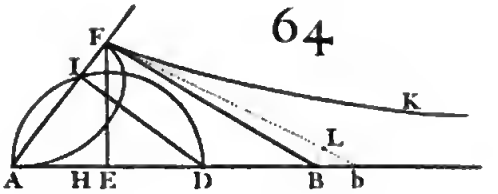
56



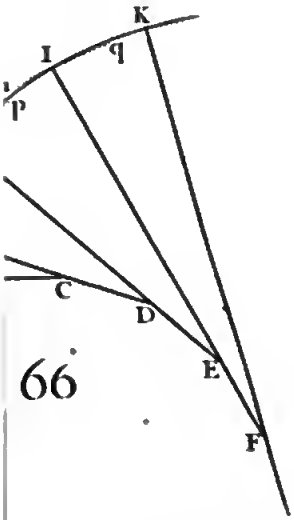
58



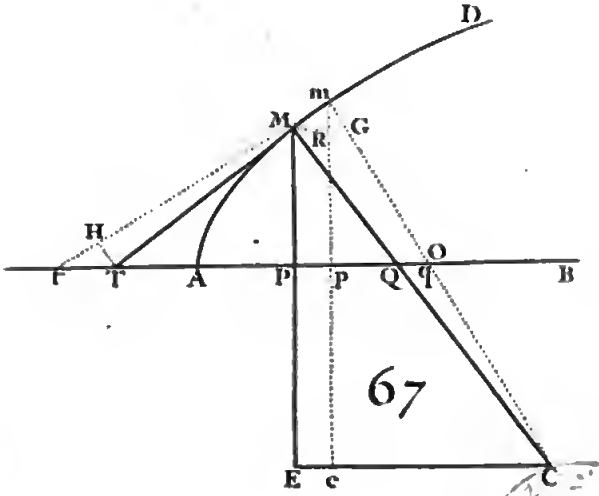
63



64

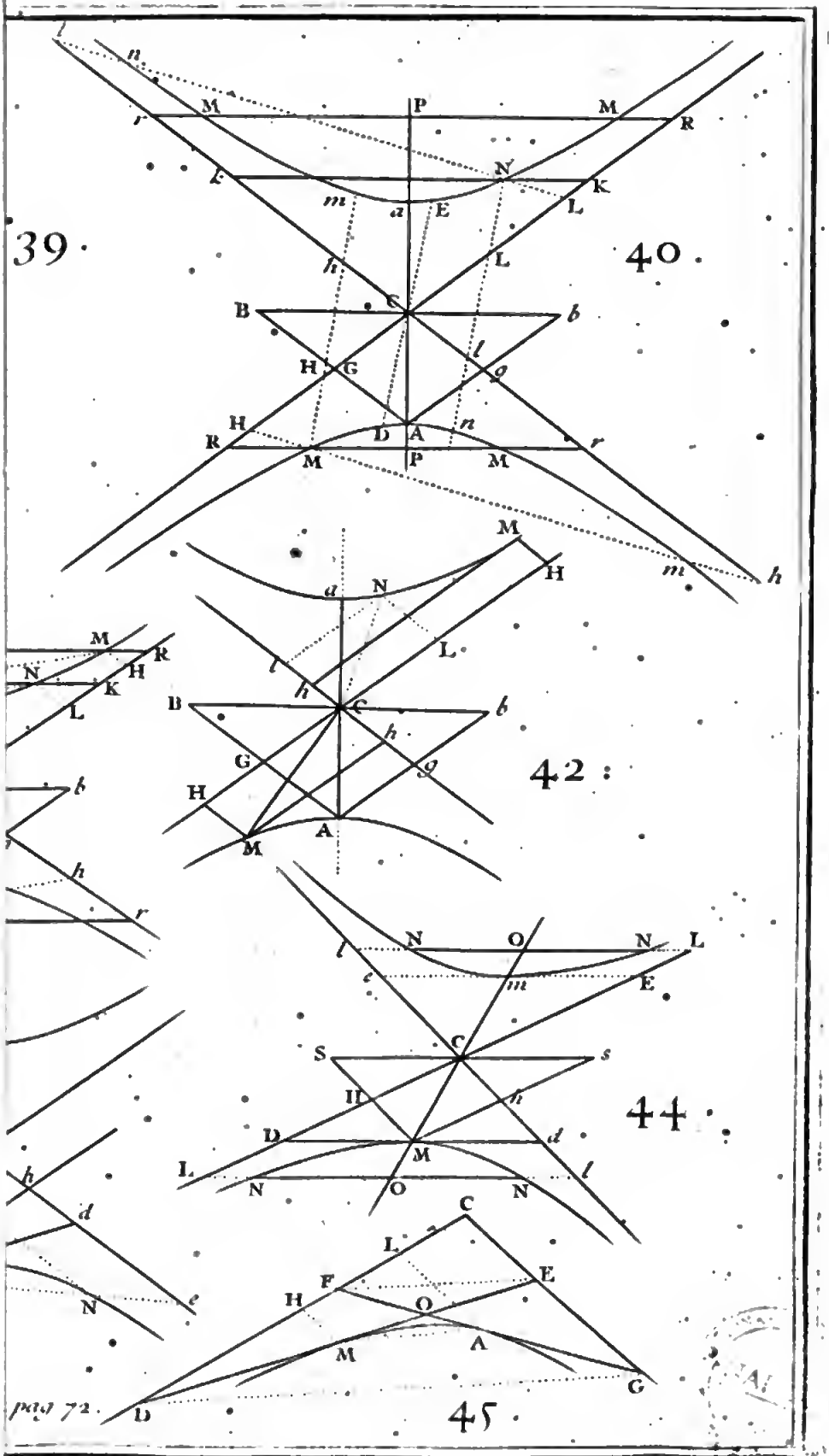


66

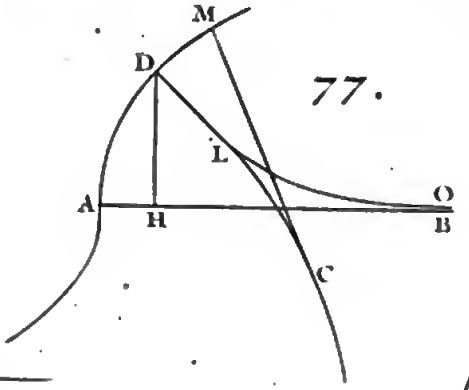


67

Grave par Berey

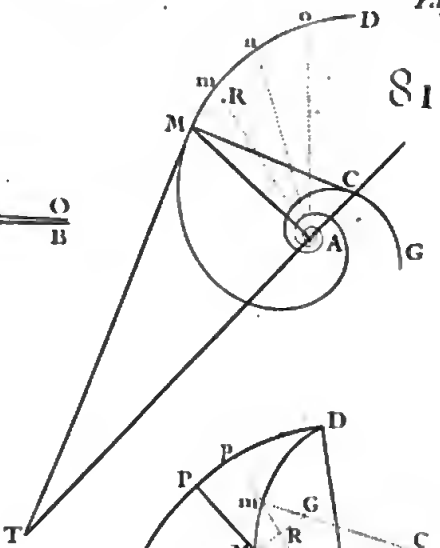

39.
40.
42.
44.
45.

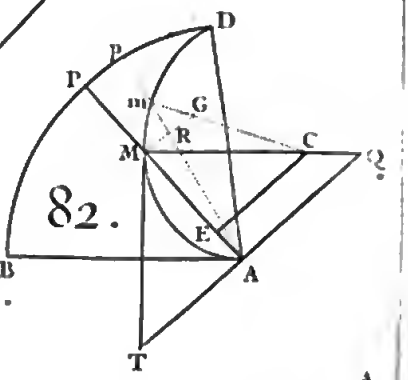
77.



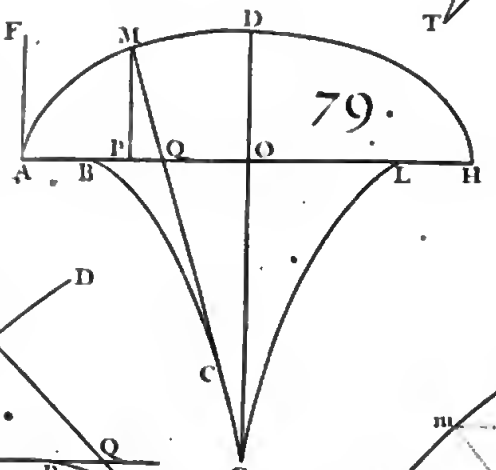
T B

81.

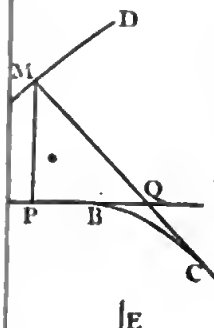


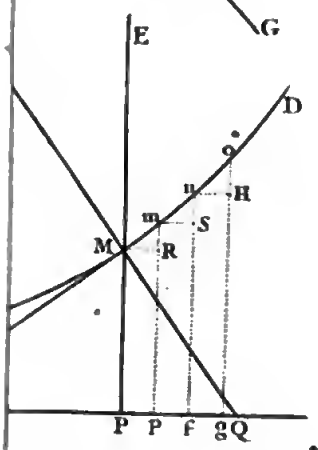


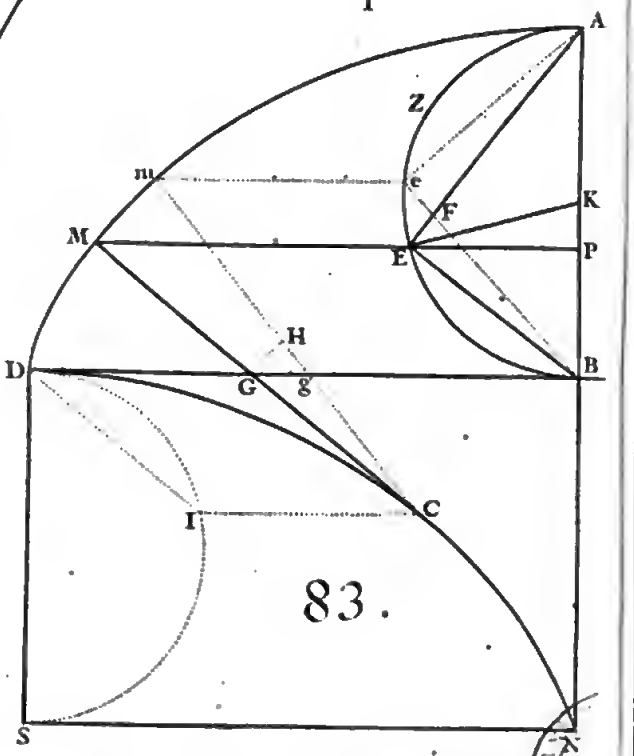
82.



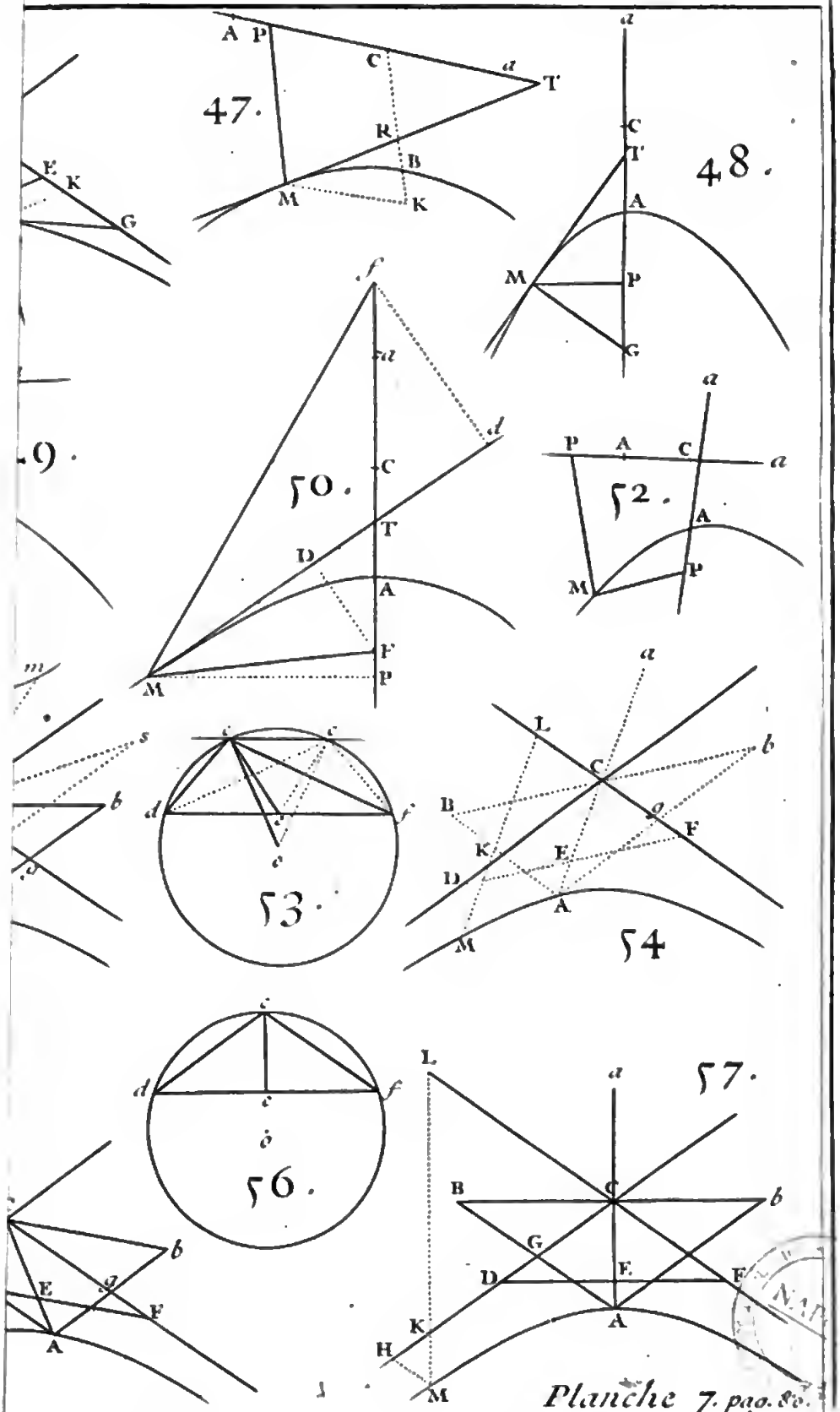
79.



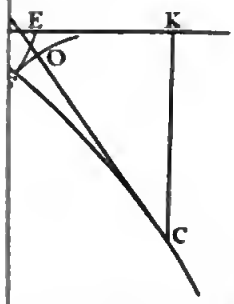


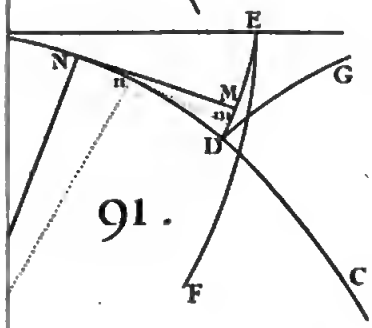


83.


47.
48.
49.
50.
52.
53.
54
56.
57.
Planche 7. pag. 80.

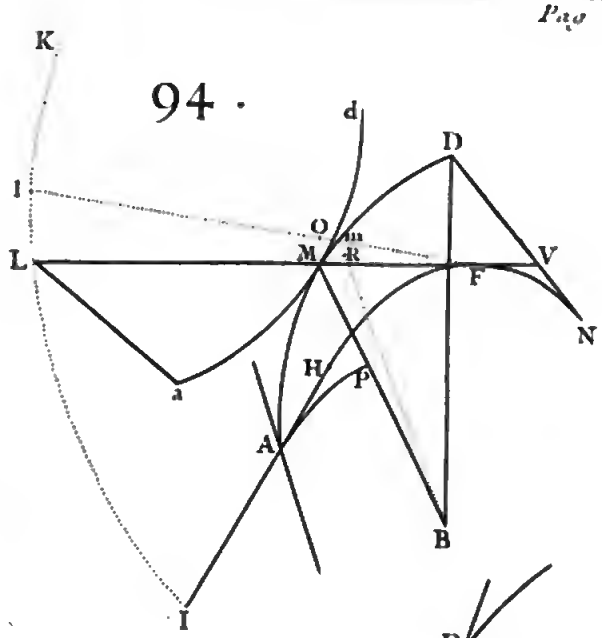
90.

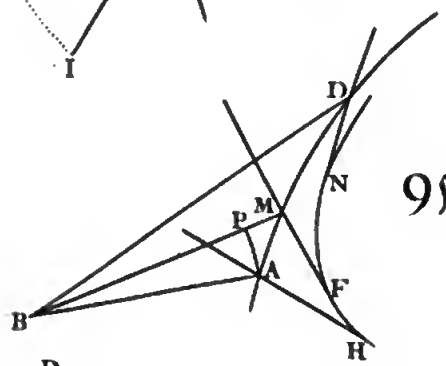




91.

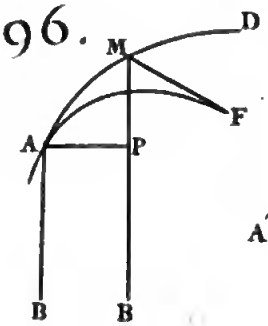
94.



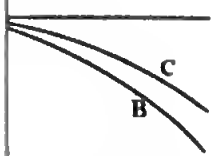


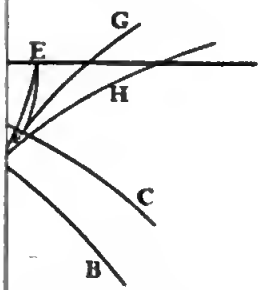
95.

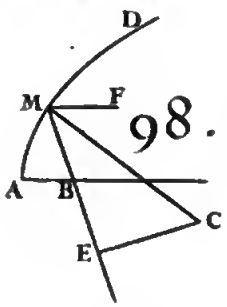
96.



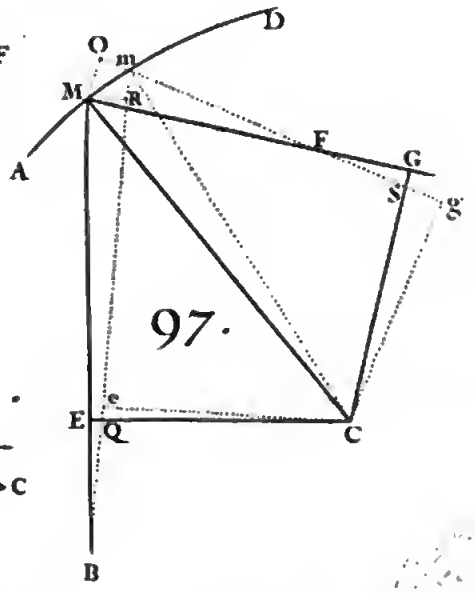
92.



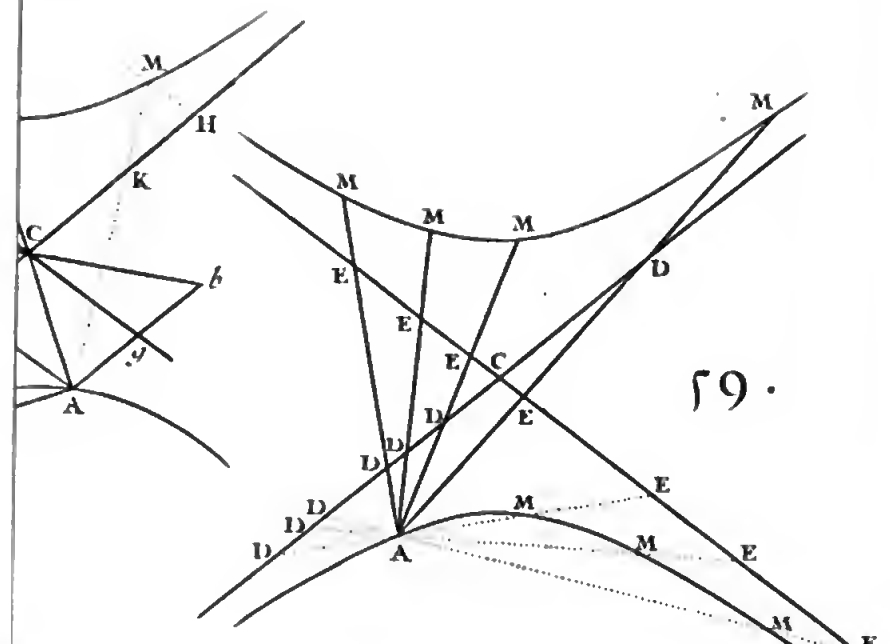




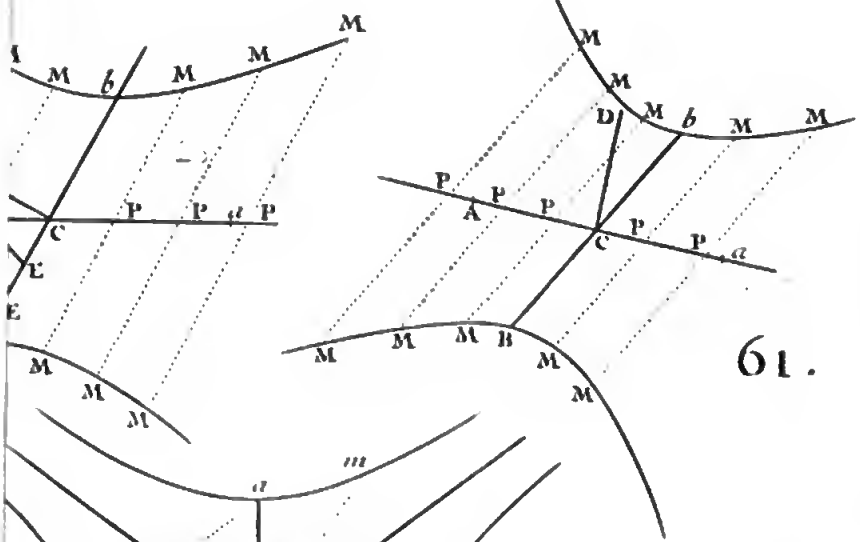
98.



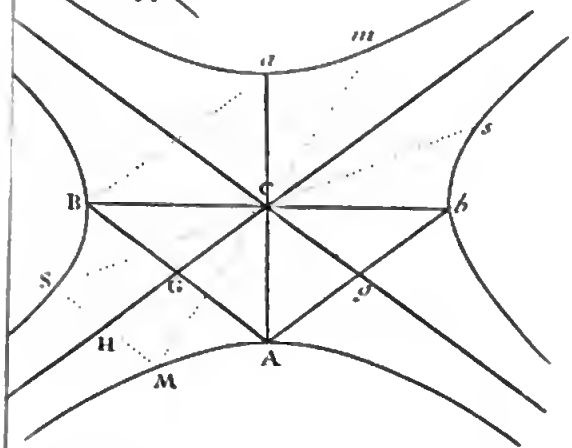
97.



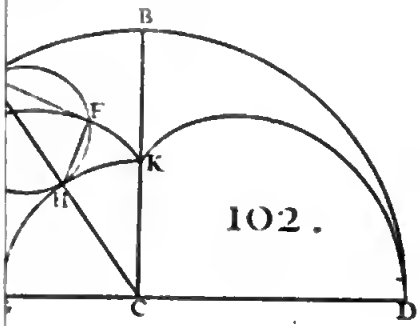
59.



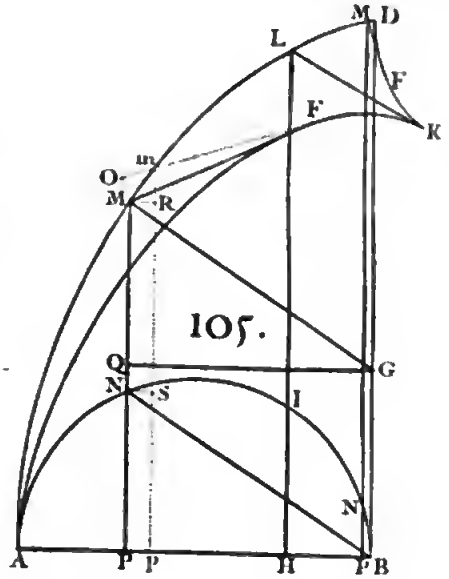
61.



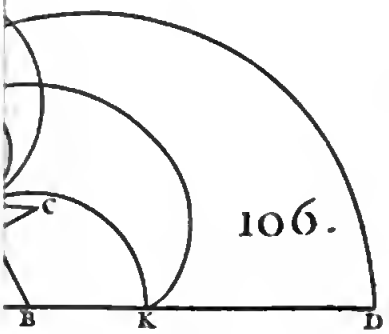
Digitized by Google



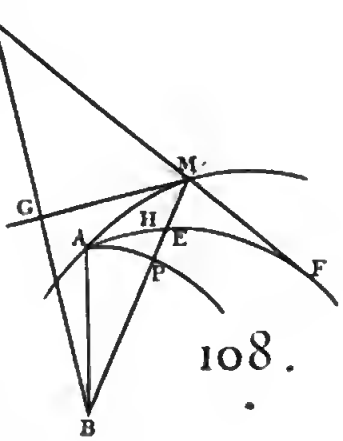
102.



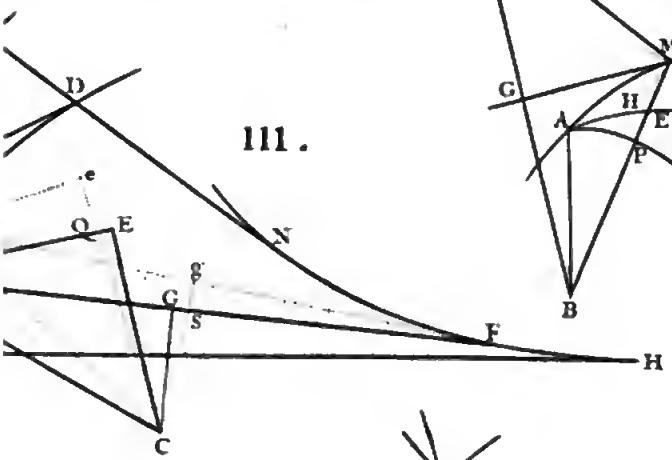
105.



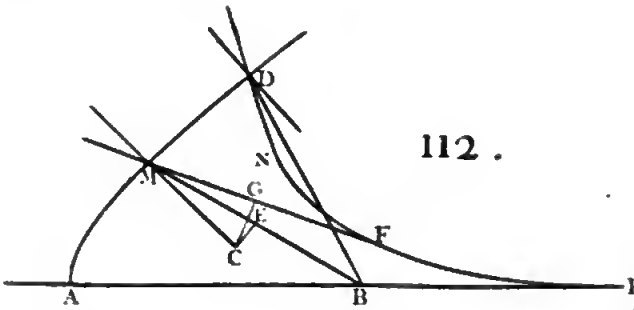
106.



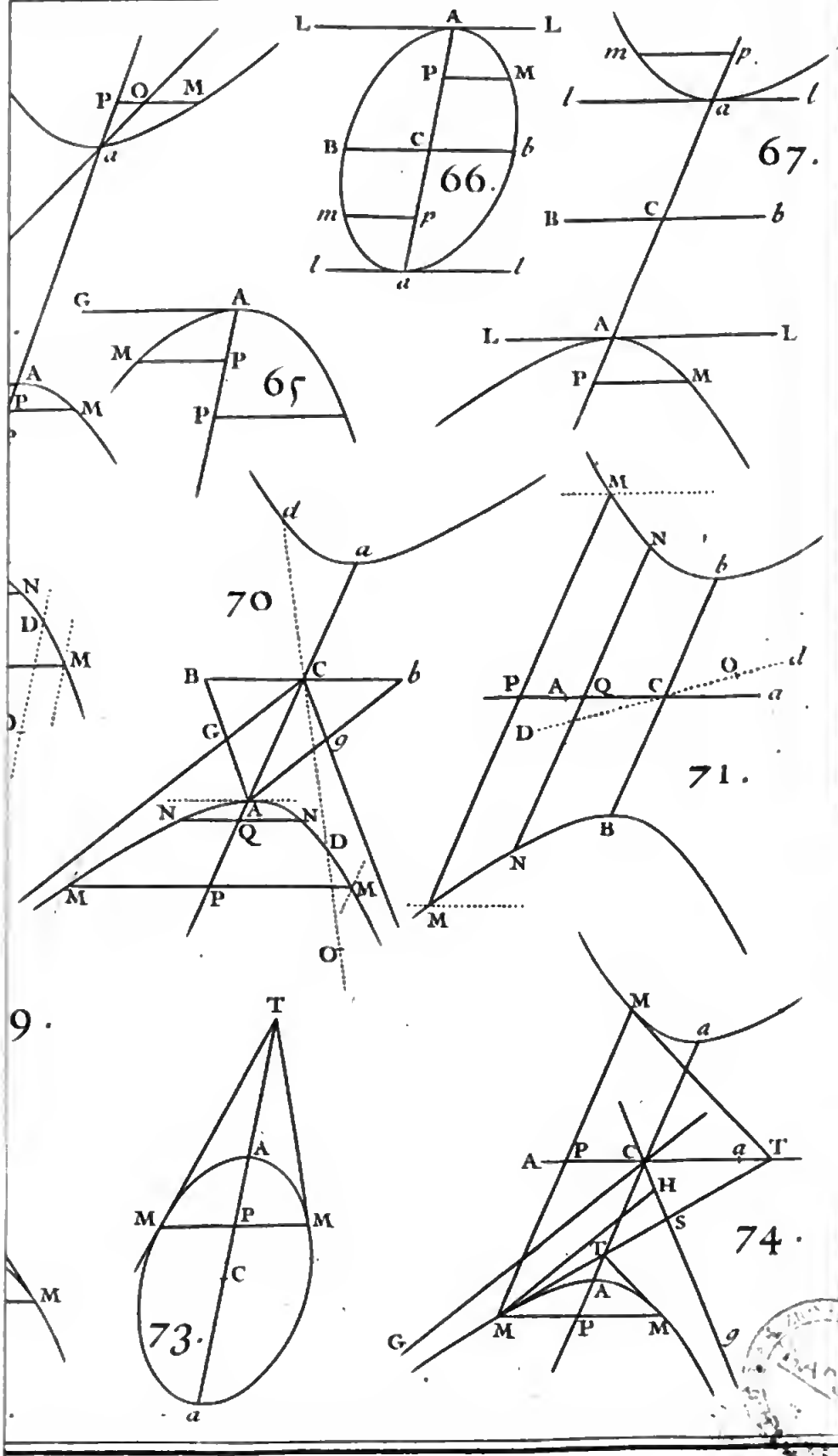
108.

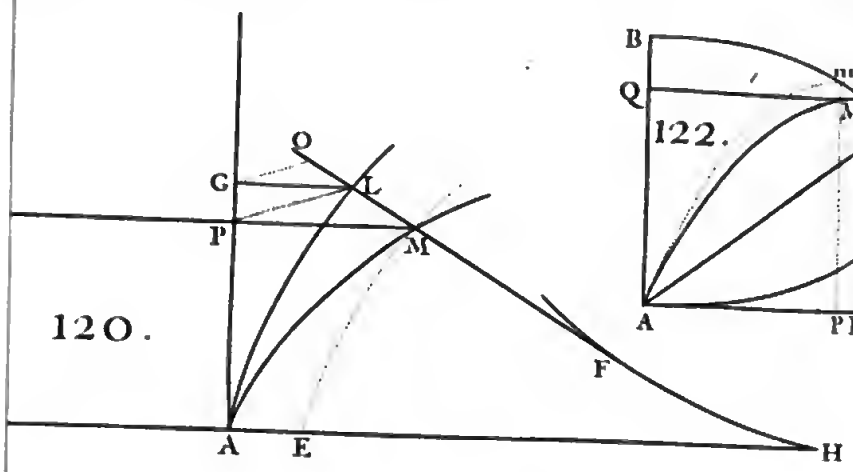


111.

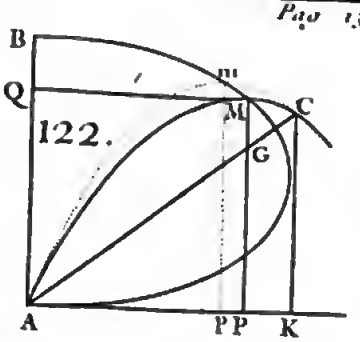


112.

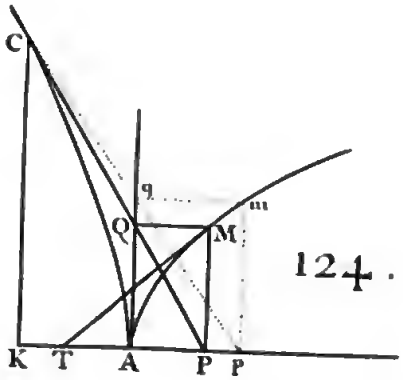

L
A
L
P
M
B
C
b
m
p
l
l
a
66.
67.
P
O
M
a
m
p
l
l
a
B
C
b
G
A
M
P
P
65
A
P
M
L
A
L
P
M
d
a
70
N
D
M
B
C
b
G
g
N
A
N
Q
D
M
P
M
O
M
N
b
P
A
Q
C
O
d
a
D
71.
N
B
M
9.
T
A
M
P
M
C
73.
a
M
a
A
P
C
a
T
H
S
74.
G
M
P
M
g



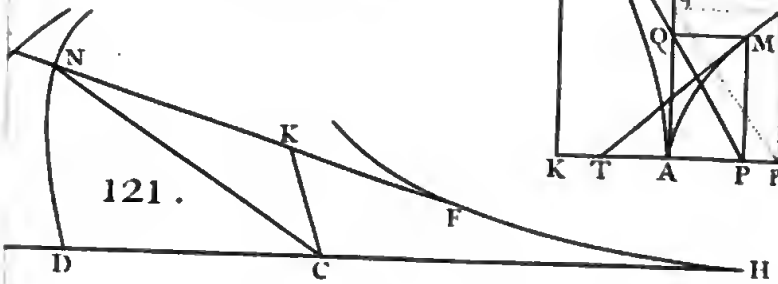
120.



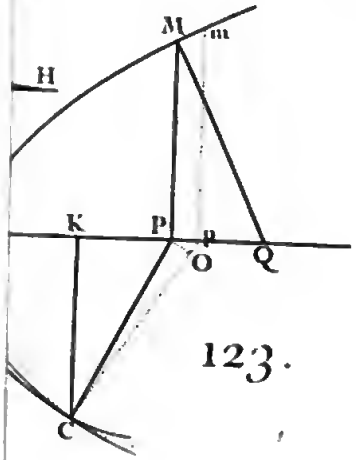
122.



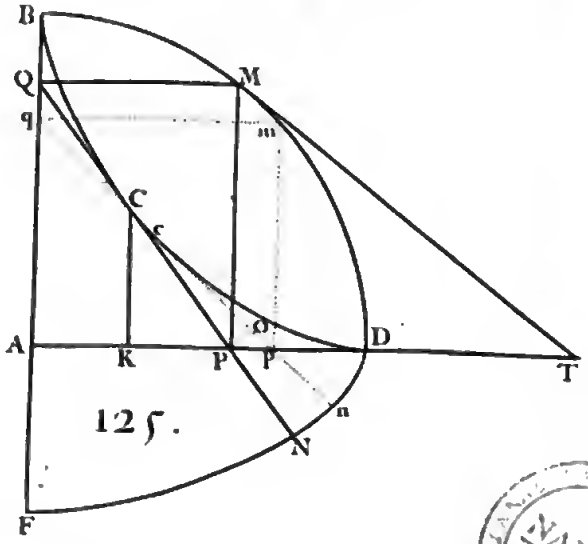
124.



121.

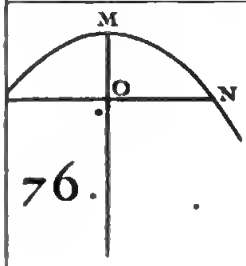


123.

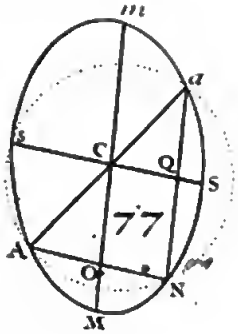


125.

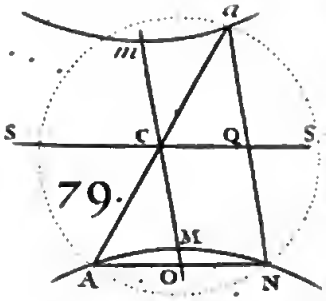
NAPOLI



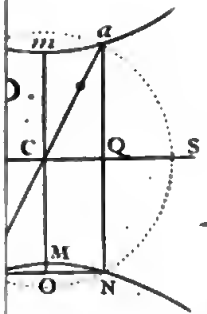
76.

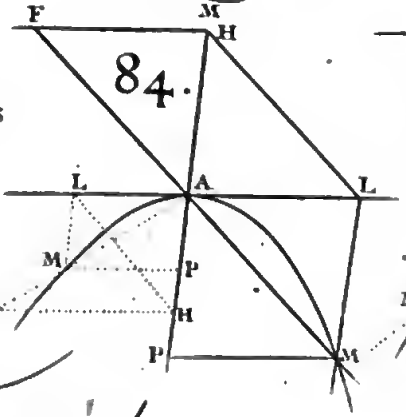


77.

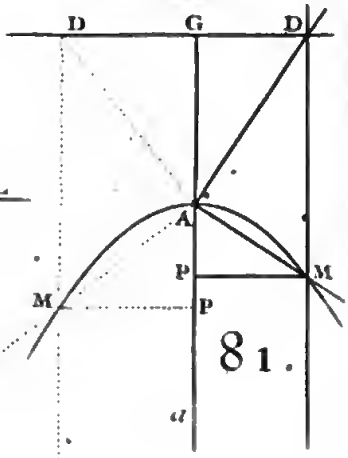


79.

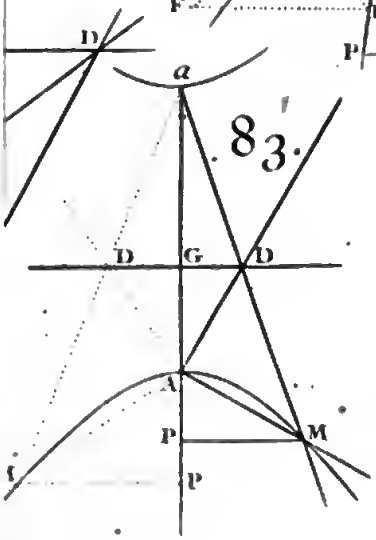




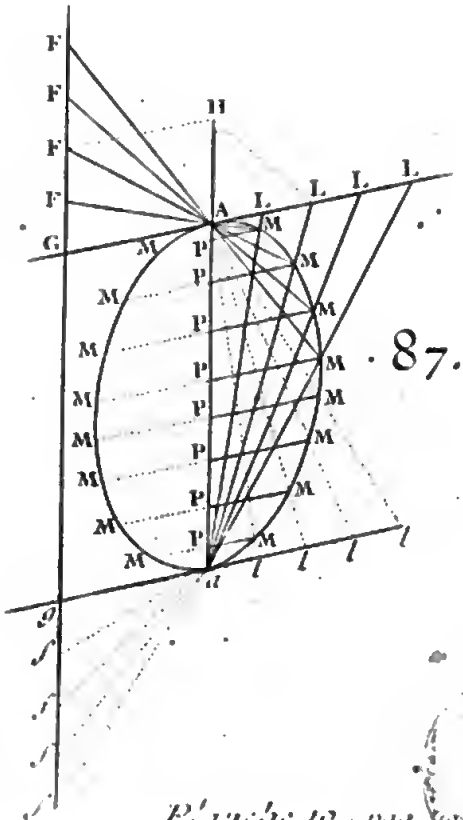
84.

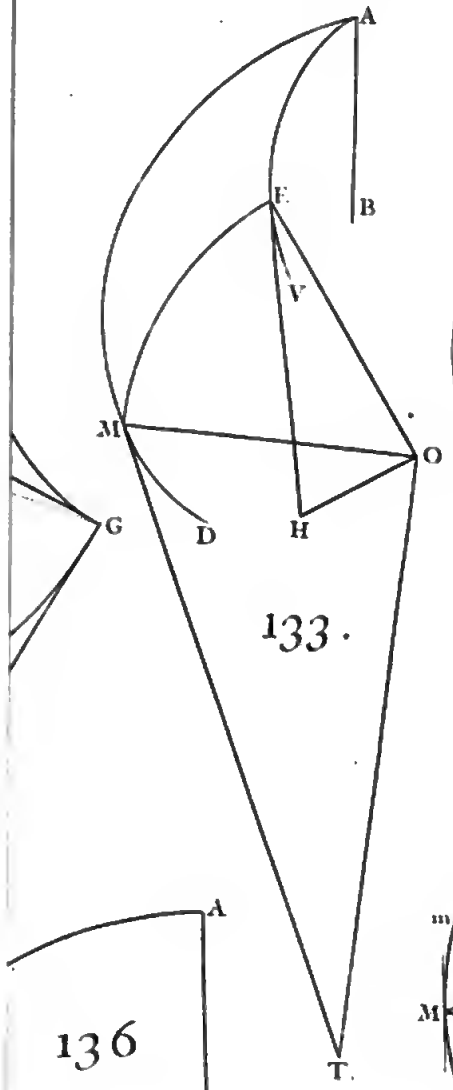


81.

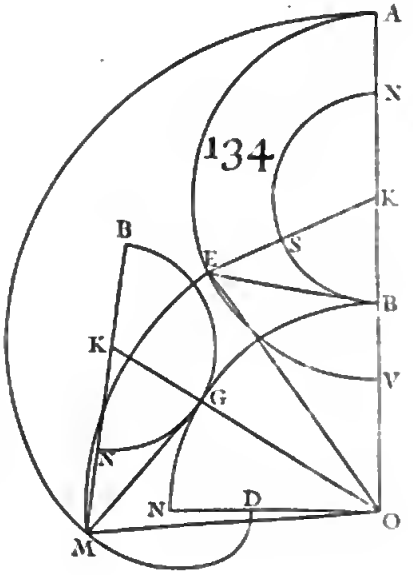


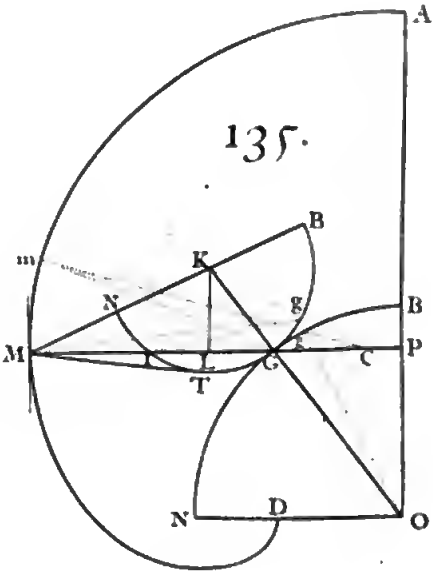
83.

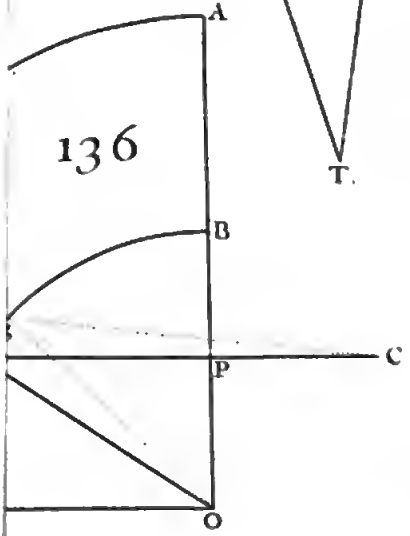

F
F
F
F
G
H
A
L
L
L
L
M
P
M
M
M


A
B
F
V
M
O
G
D
H
T

133.

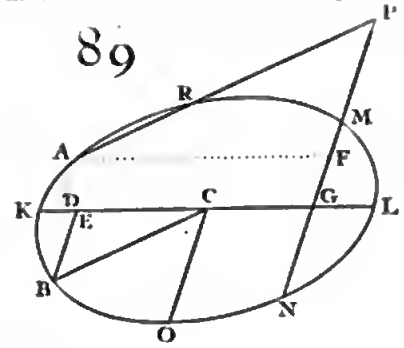

134
A
N
K
B
S
B
K
V
G
N
N
D
M
O

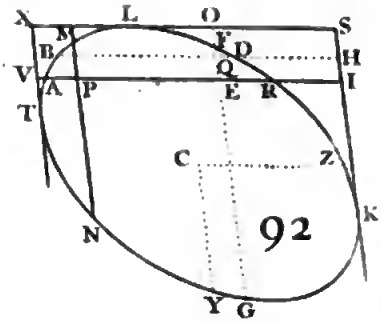

135.
A
B
m
K
N
g
B
M
C
P
T
G
N
D
O

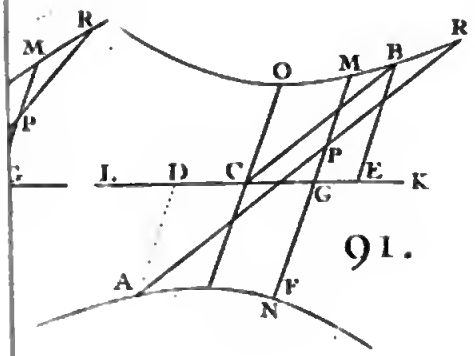

136
A
B
C
P
O

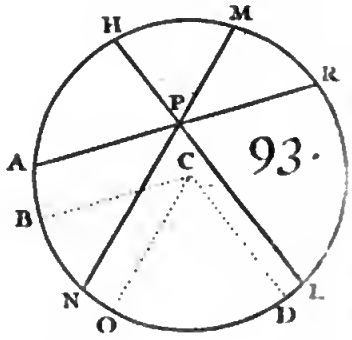
D
A
C
B

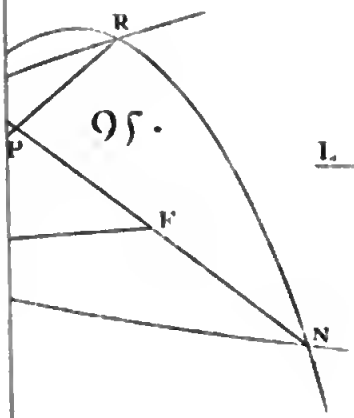
137.

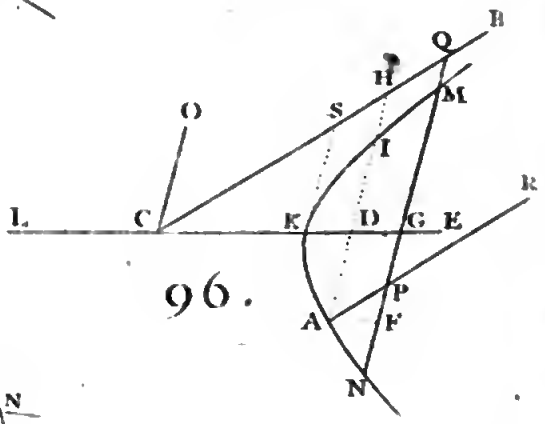












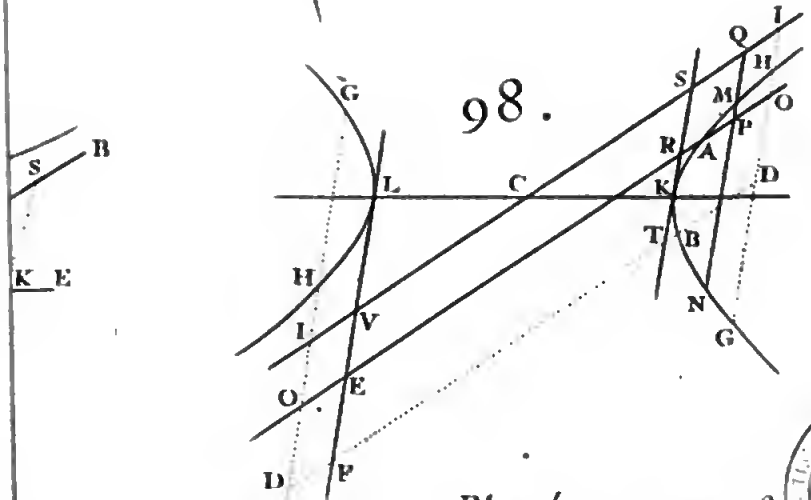
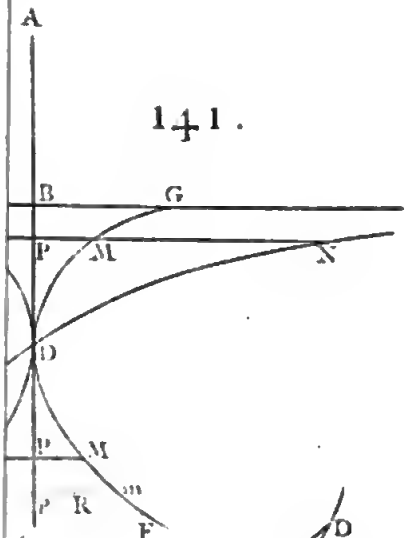


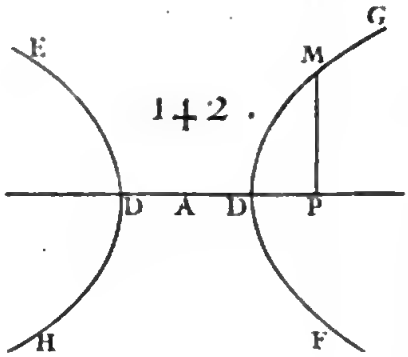
Planche II . pag. 118.

Digitized by Google

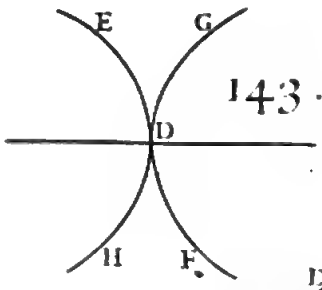
141.



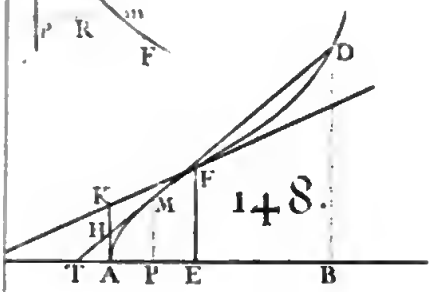
142.



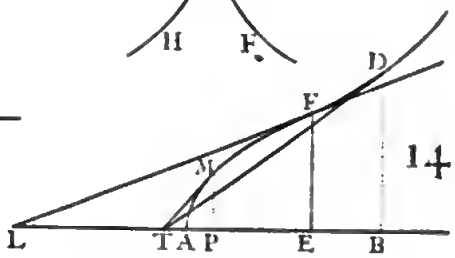
143.



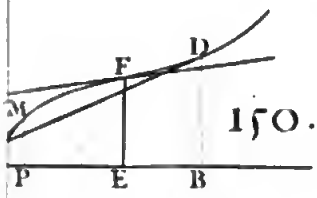
148.



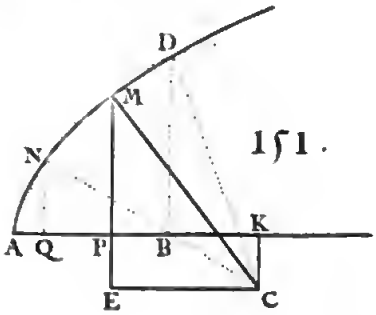
149.



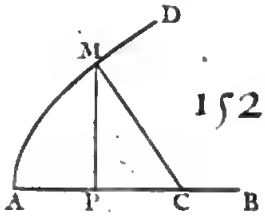
150.



151.

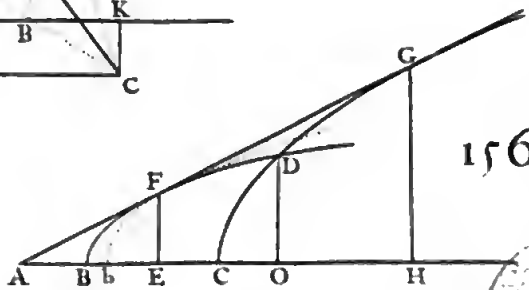


152.

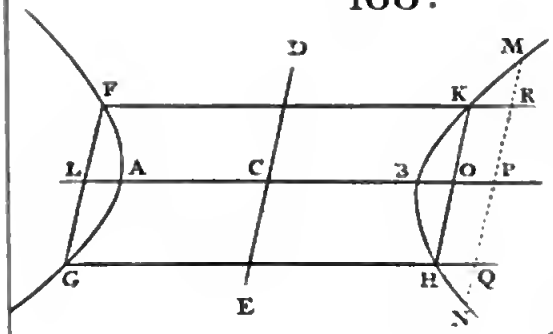


155.

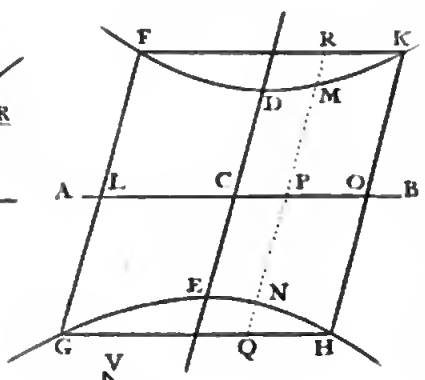
156.

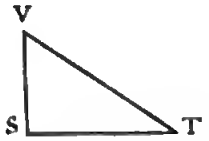


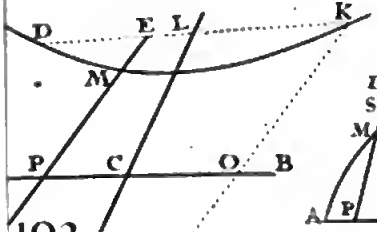
100.



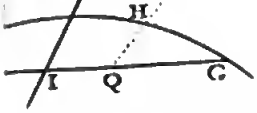
101.



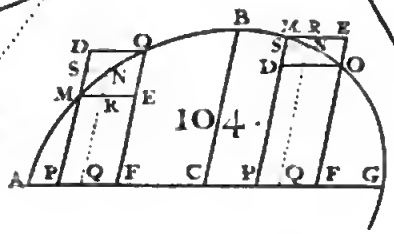


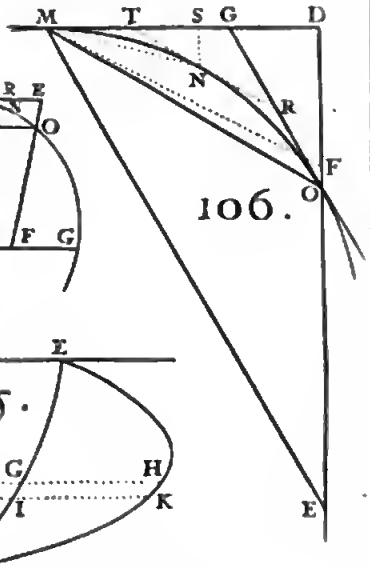


103.

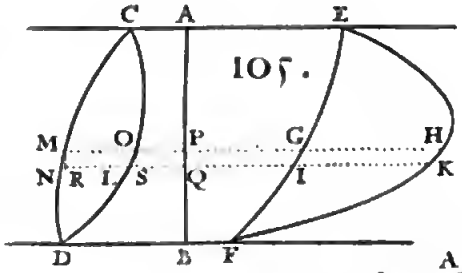


104.

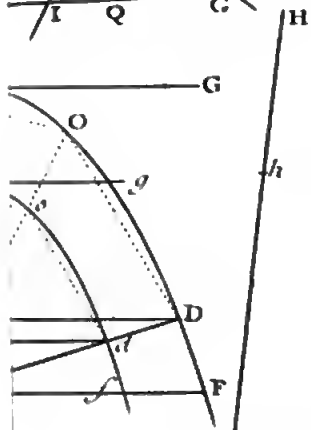




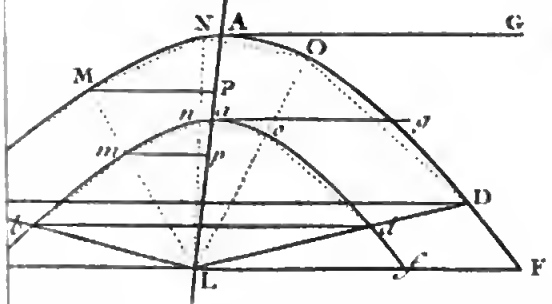
106.

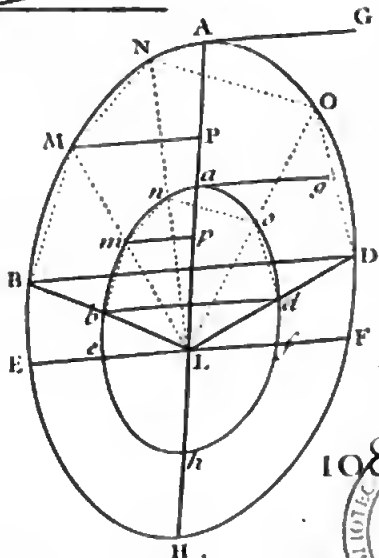


107.

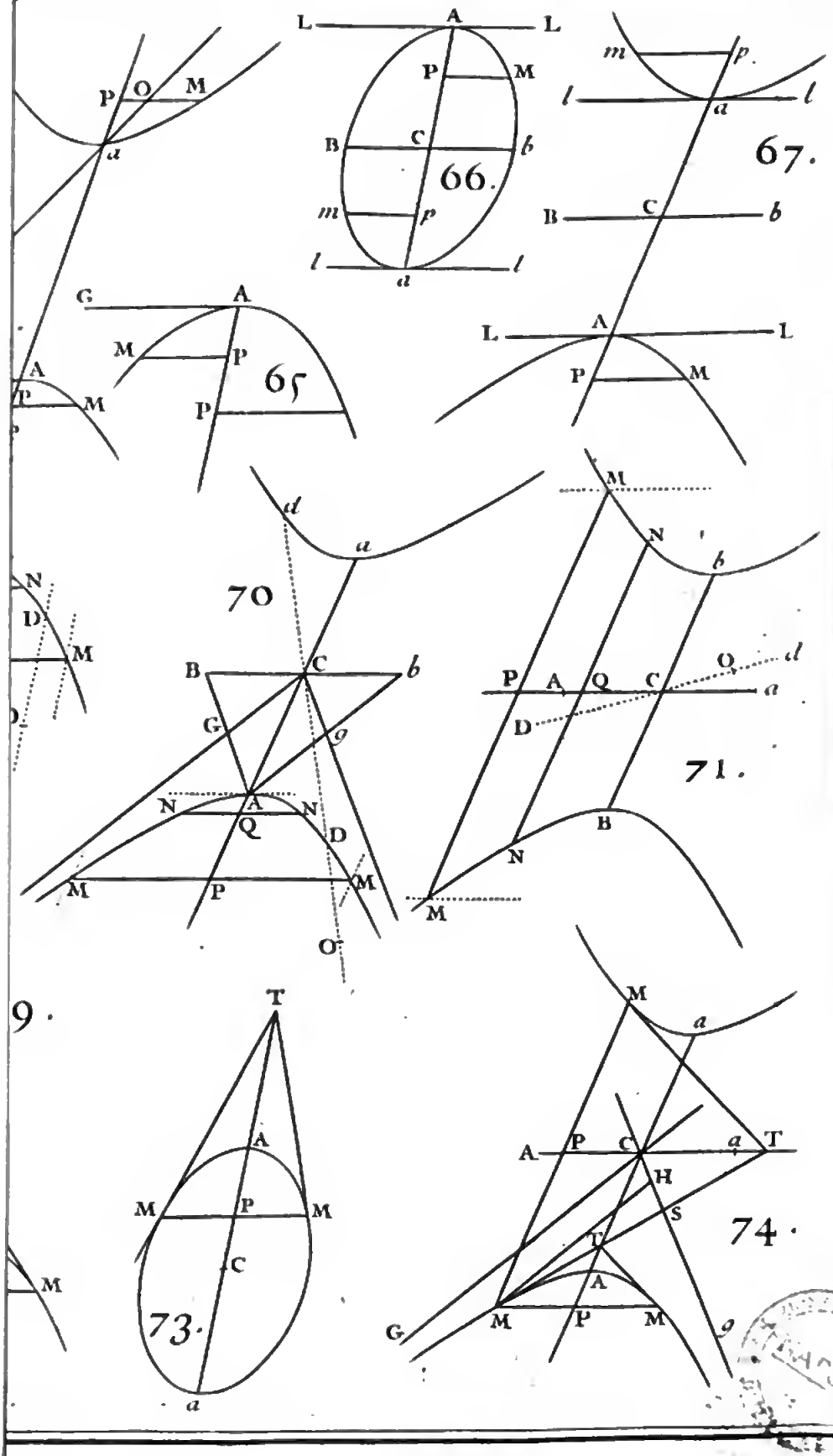


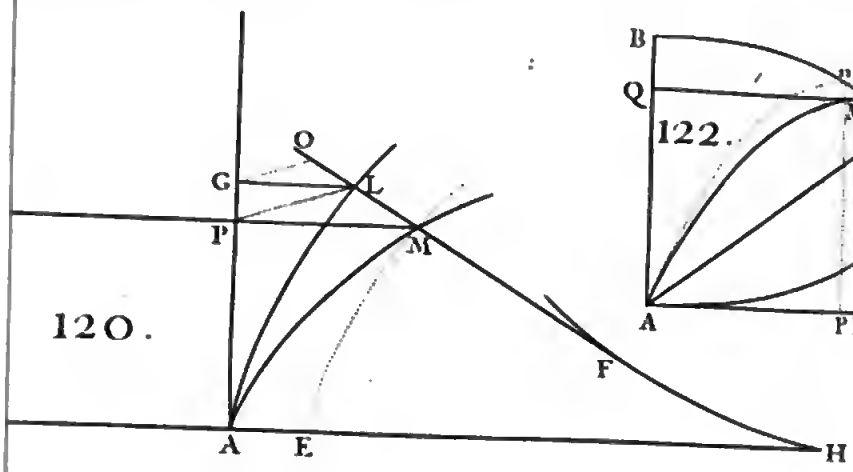
109.



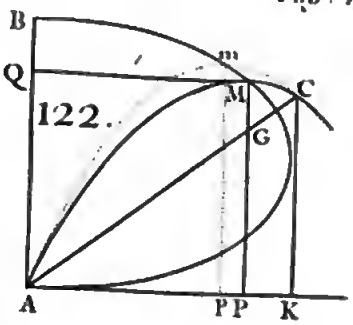


108.

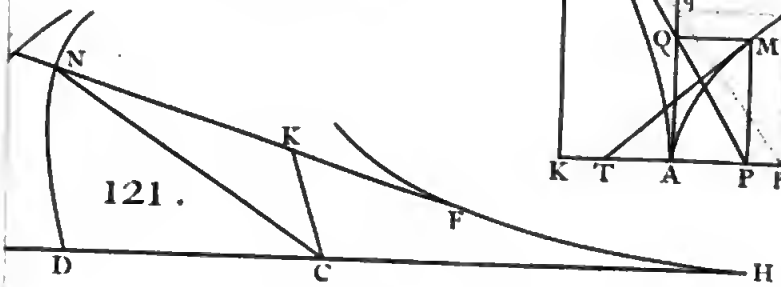

L A L
P M
B C b
m p
l a l
66.
67.
m p
l a l
B C b
L A L
P M
G A
M P
P
65
A
P M
d a
70
N
D M
B C b
G g
N A N
Q D
M P M
O
N
b
M
P A Q C O d
a
D
71.
B
N
M
9.
T
A
M P M
C
73.
a
M
a
A P C a T
H
S
U
A
G M P M g
74.



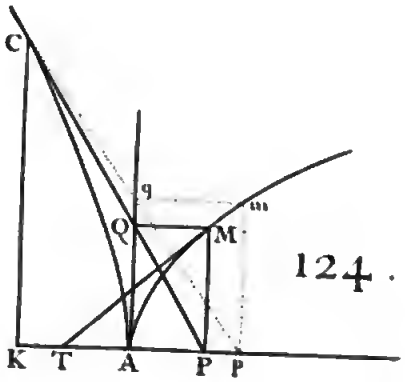
120.



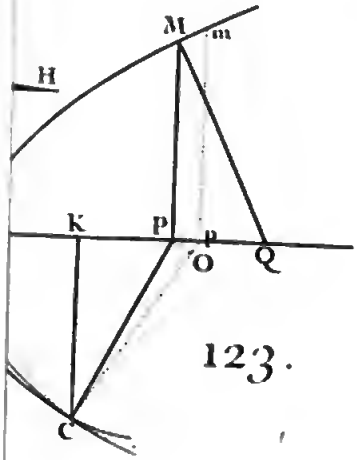
122.



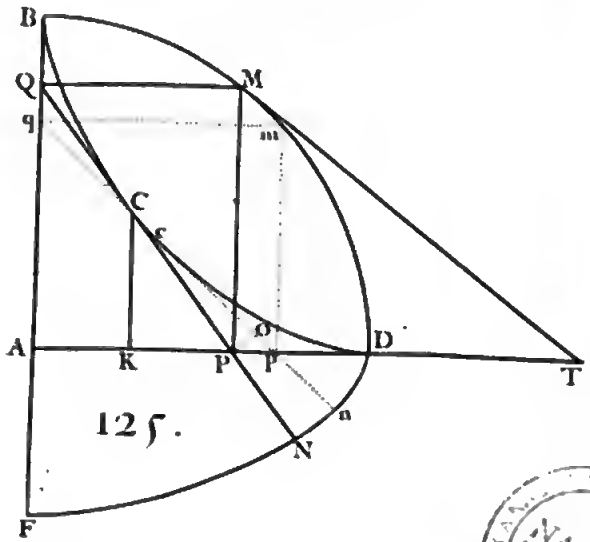
121.



124.

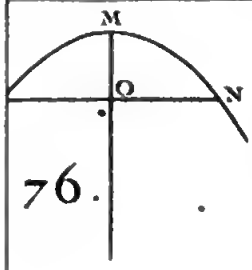


123.

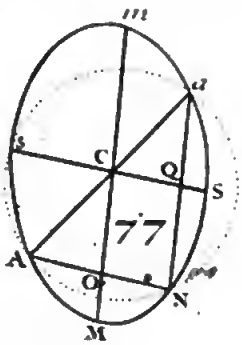


125.

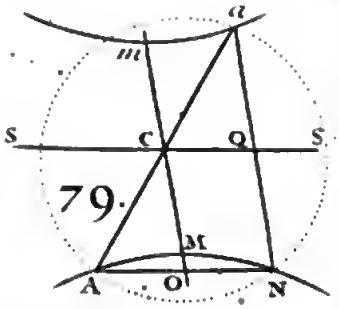
Digitized by Google



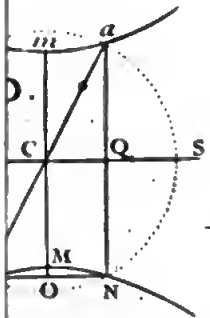
76.

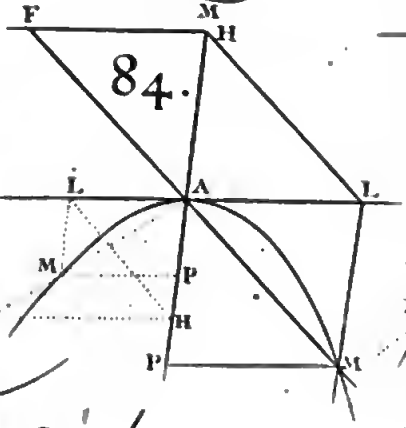


77.

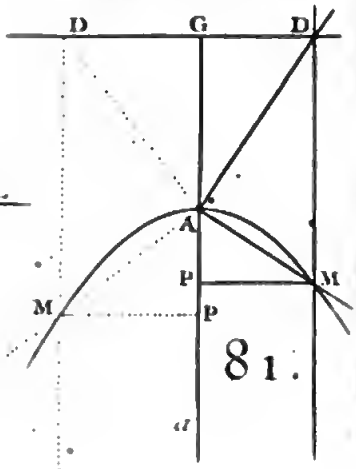


79.

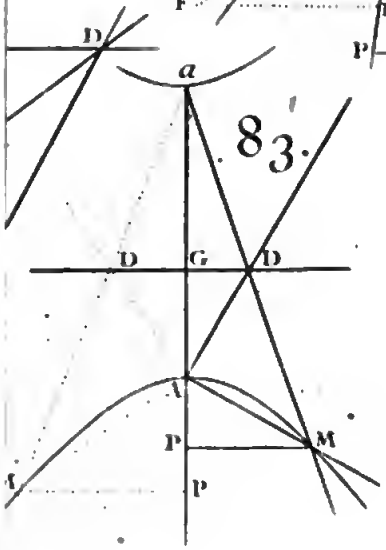




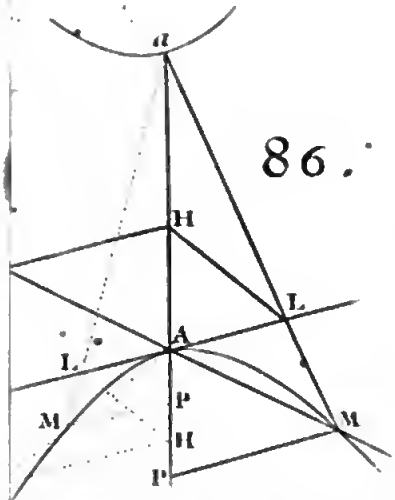
84.



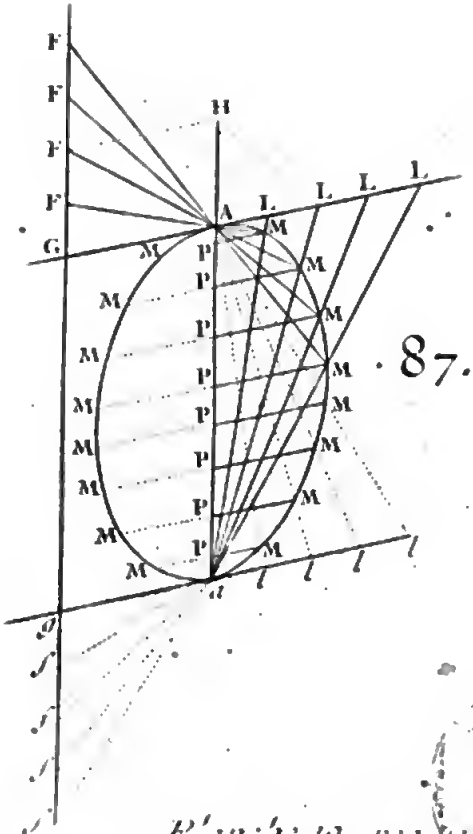
81.



83.

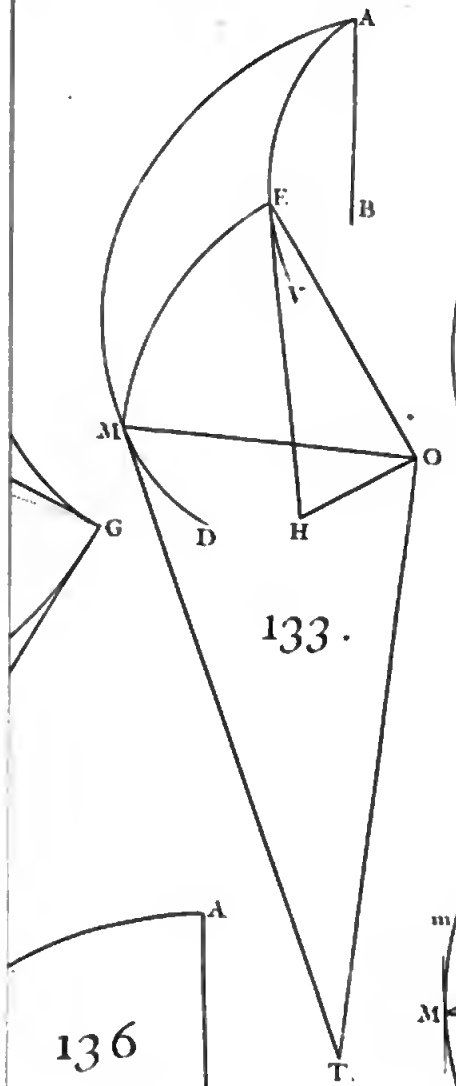


86.

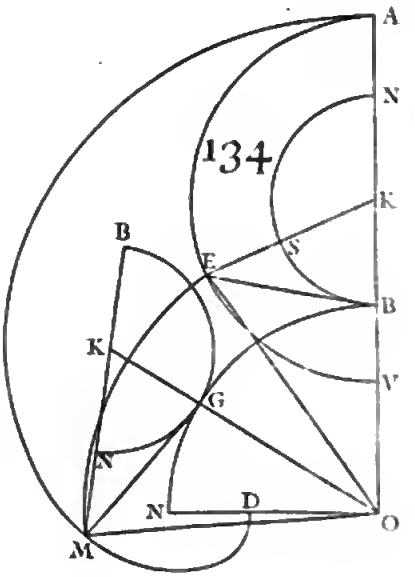


87.

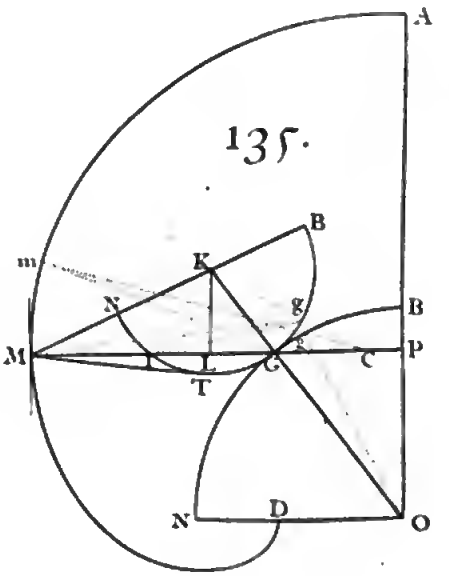
Planche 10. pag. 94.



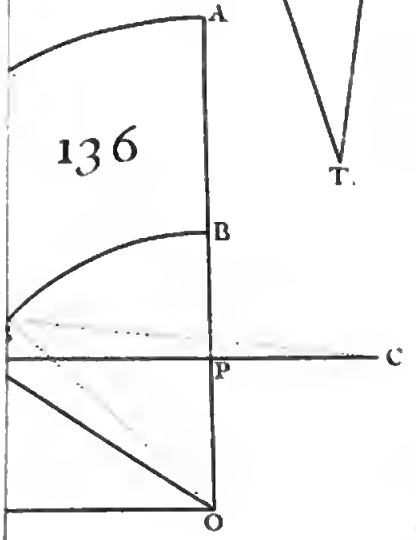
133.



134.



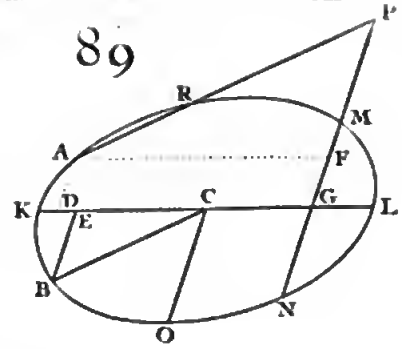
135.

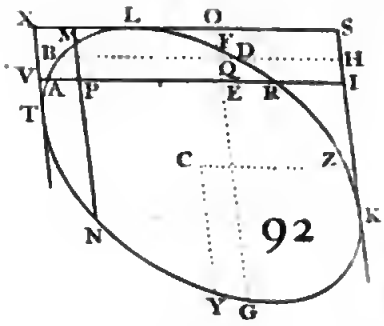


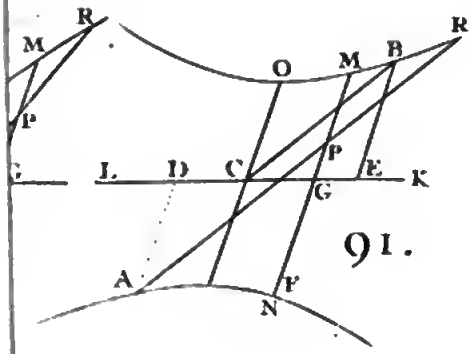
136

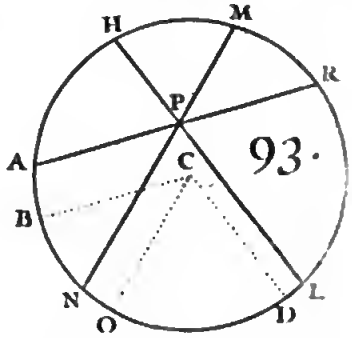
137.

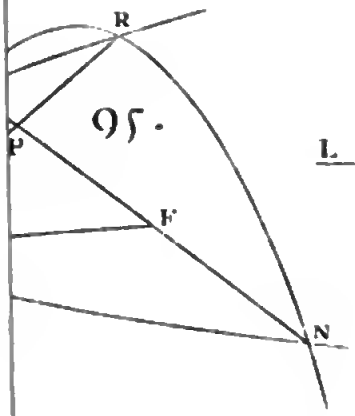
89

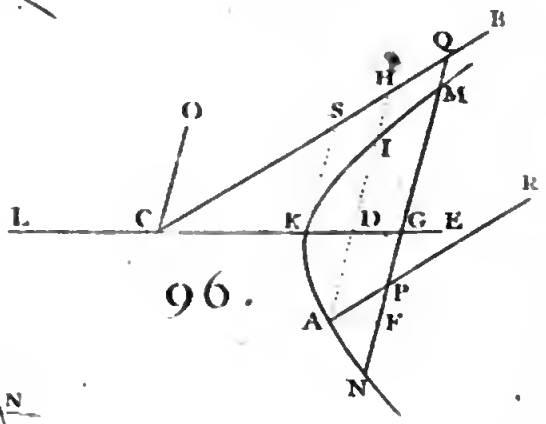












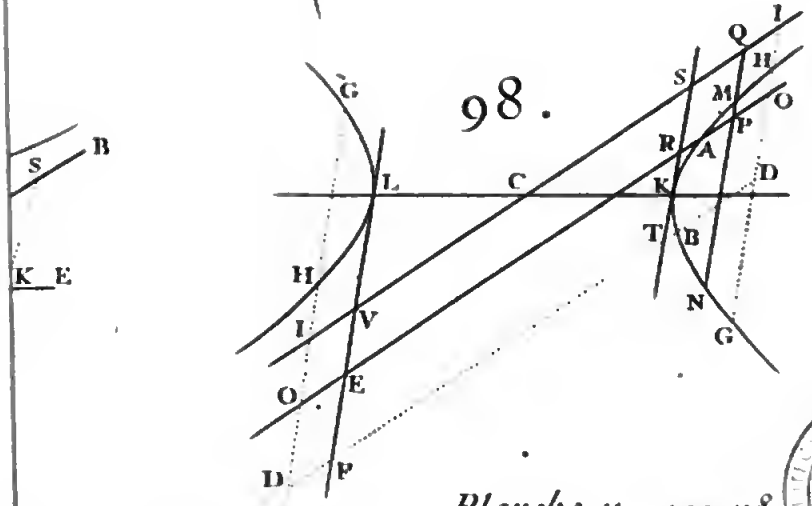
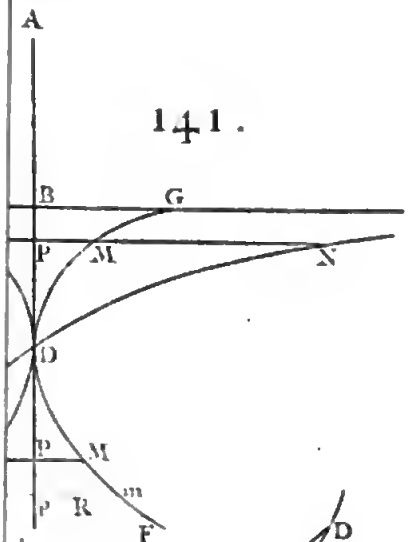


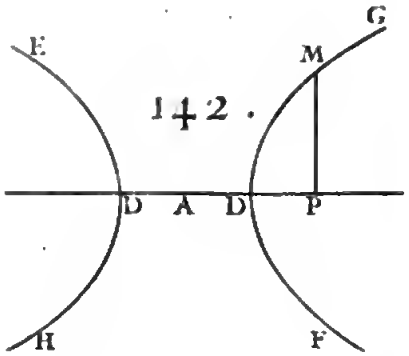
Planche II . pag. 118.

Digitized by Google

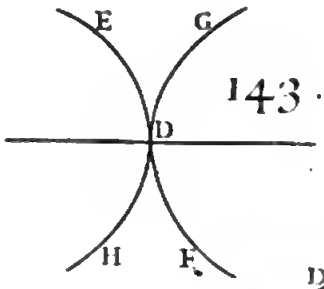
141.



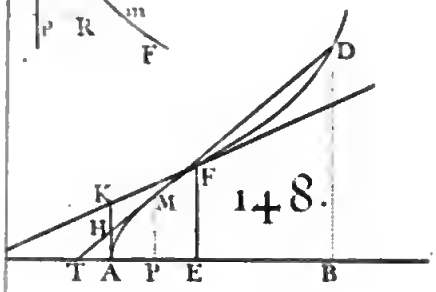
142.



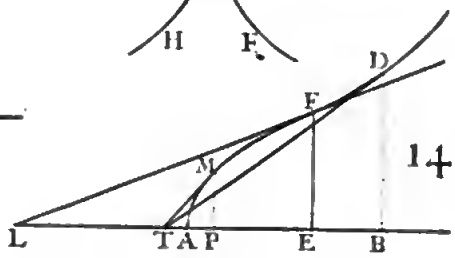
143.



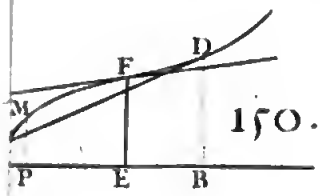
148.



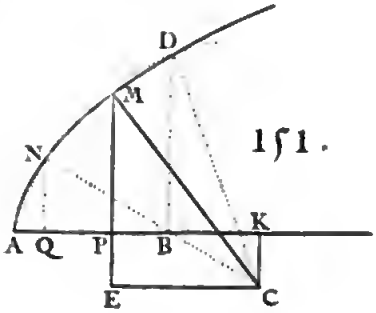
149.



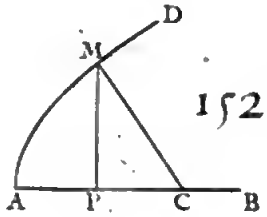
150.



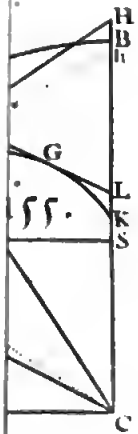
151.



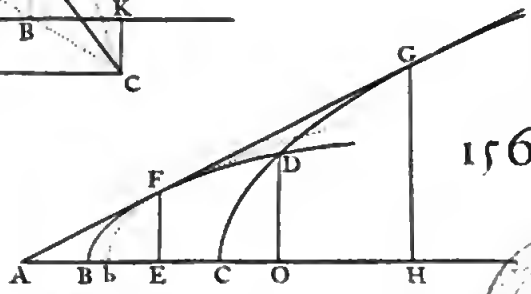
152.



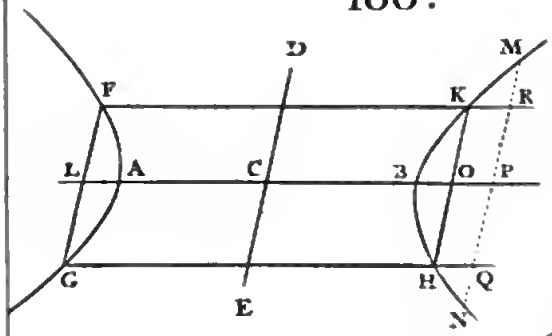
155.



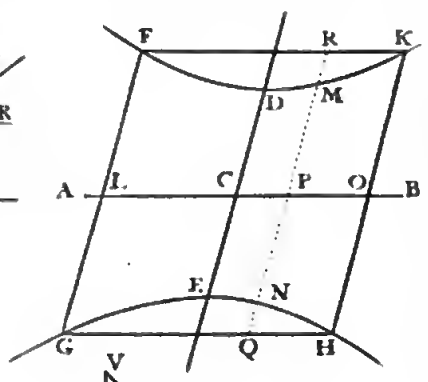
156.

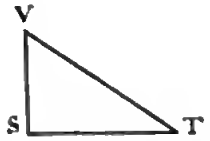


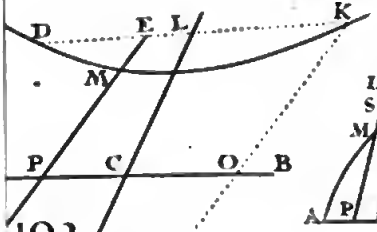
100.



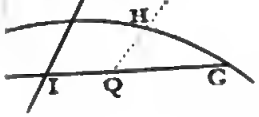
101.

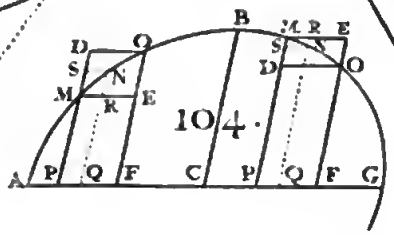




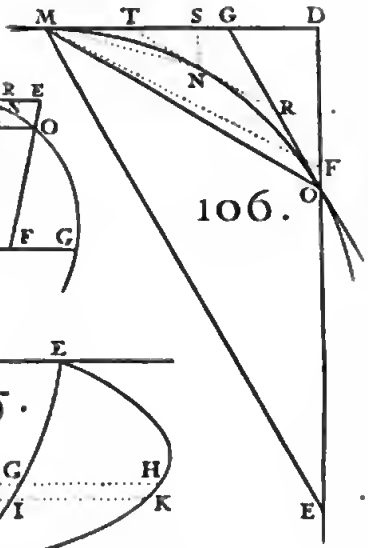


103.

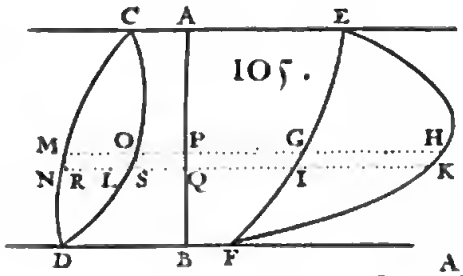




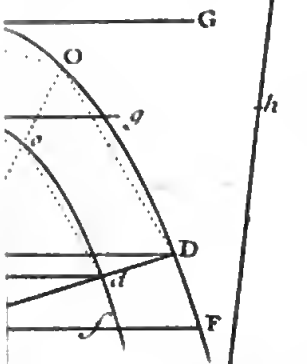
104.

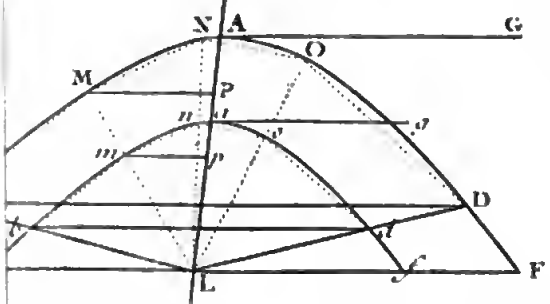


106.

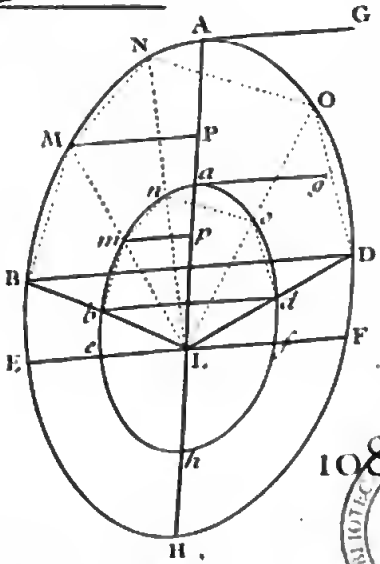


105.





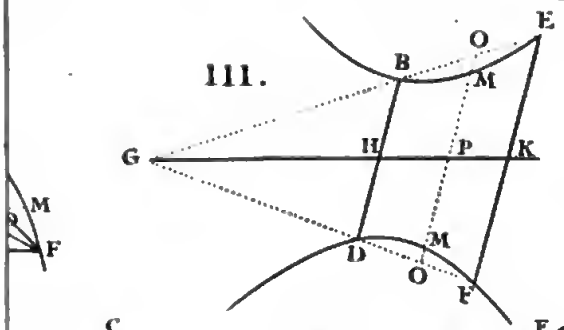
109.

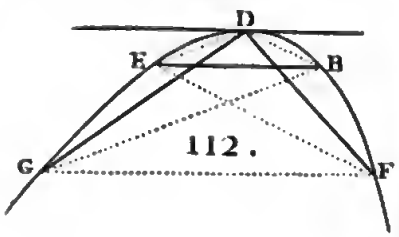


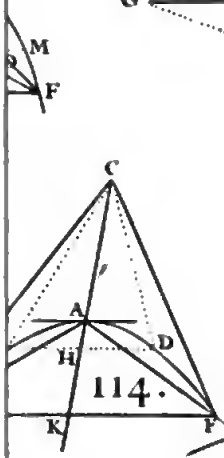
108.

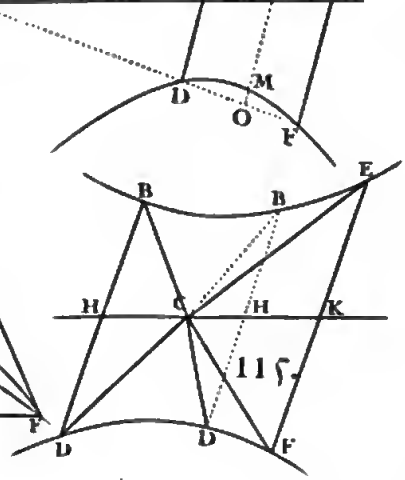
BIBLIOTECA CENTRALE

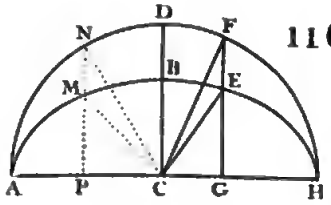
Digitized by Google

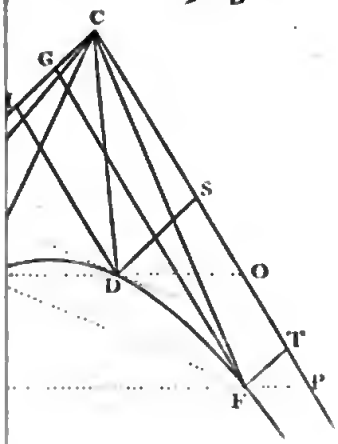


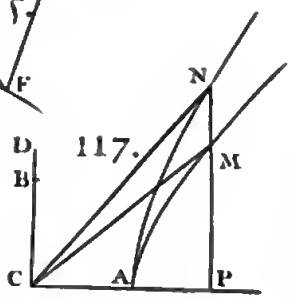


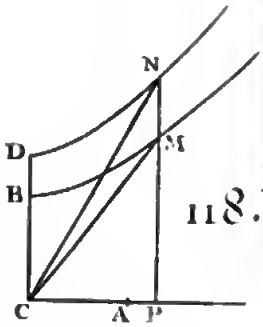


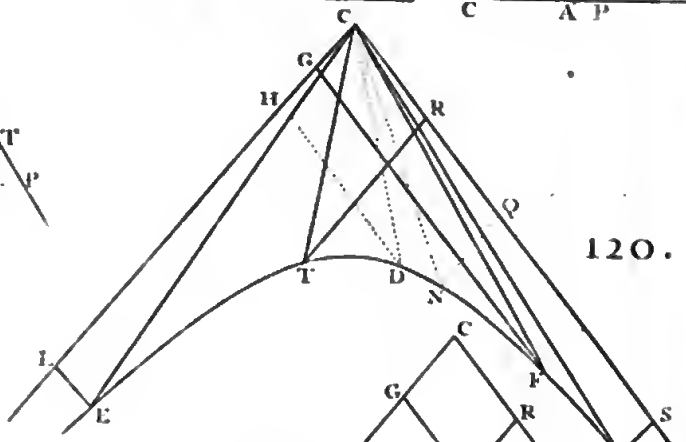


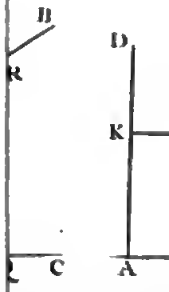


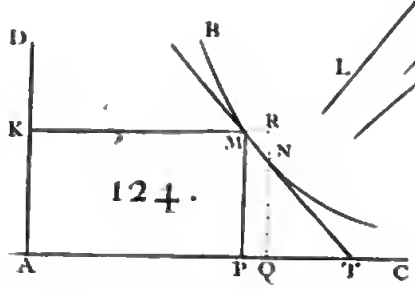


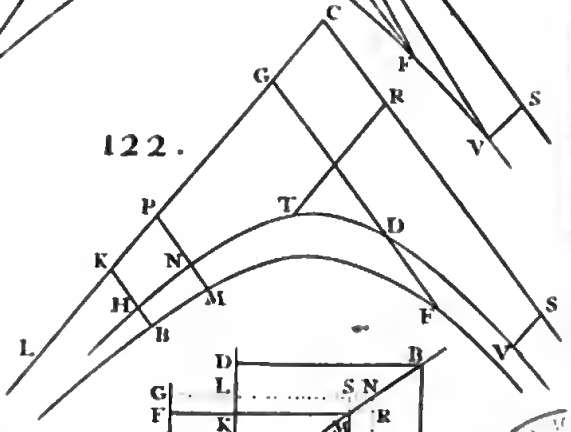












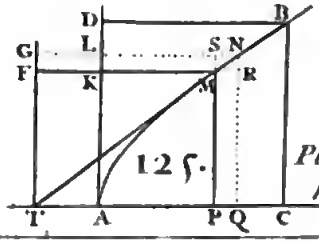
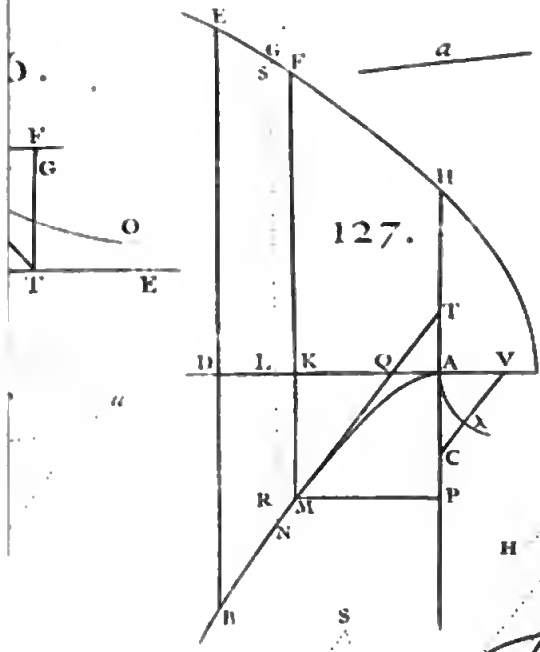
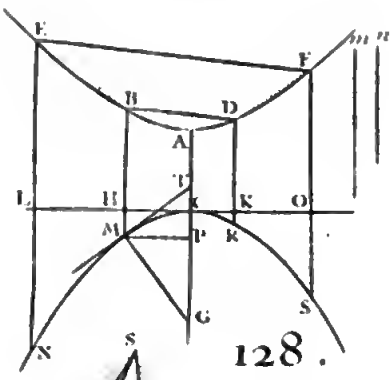
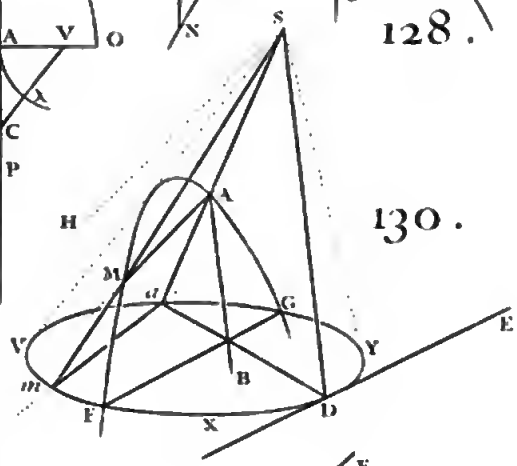


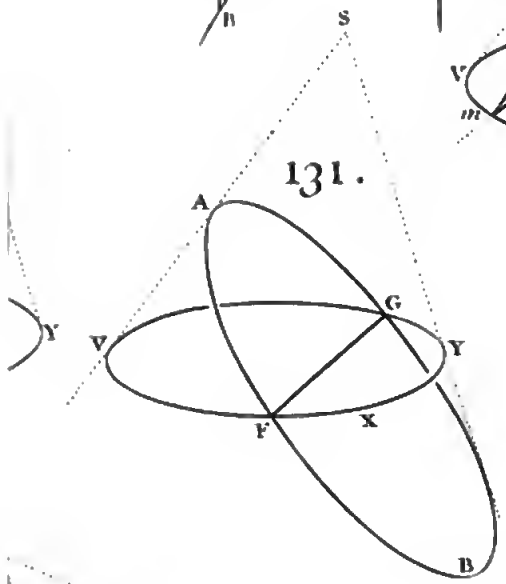
Planche 12.
pag. 158.

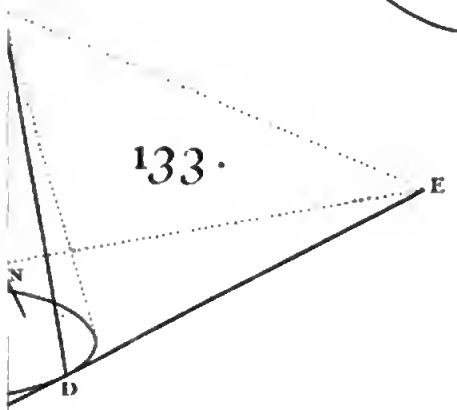




128.







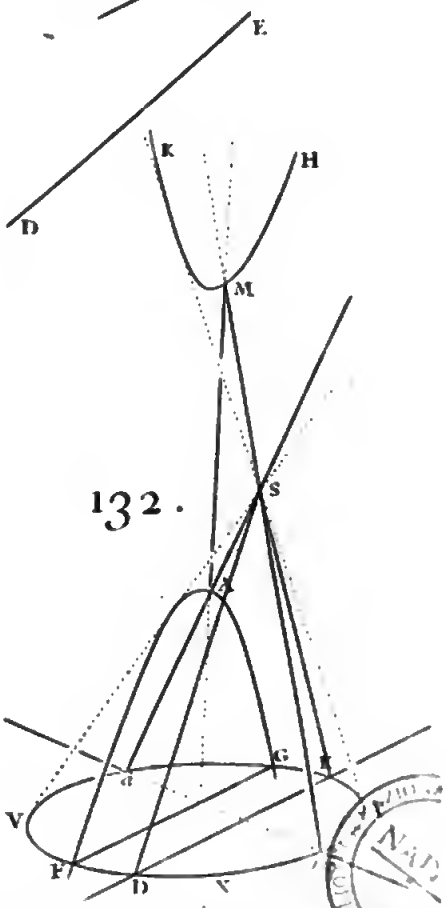


Planche 14. pag. 178.

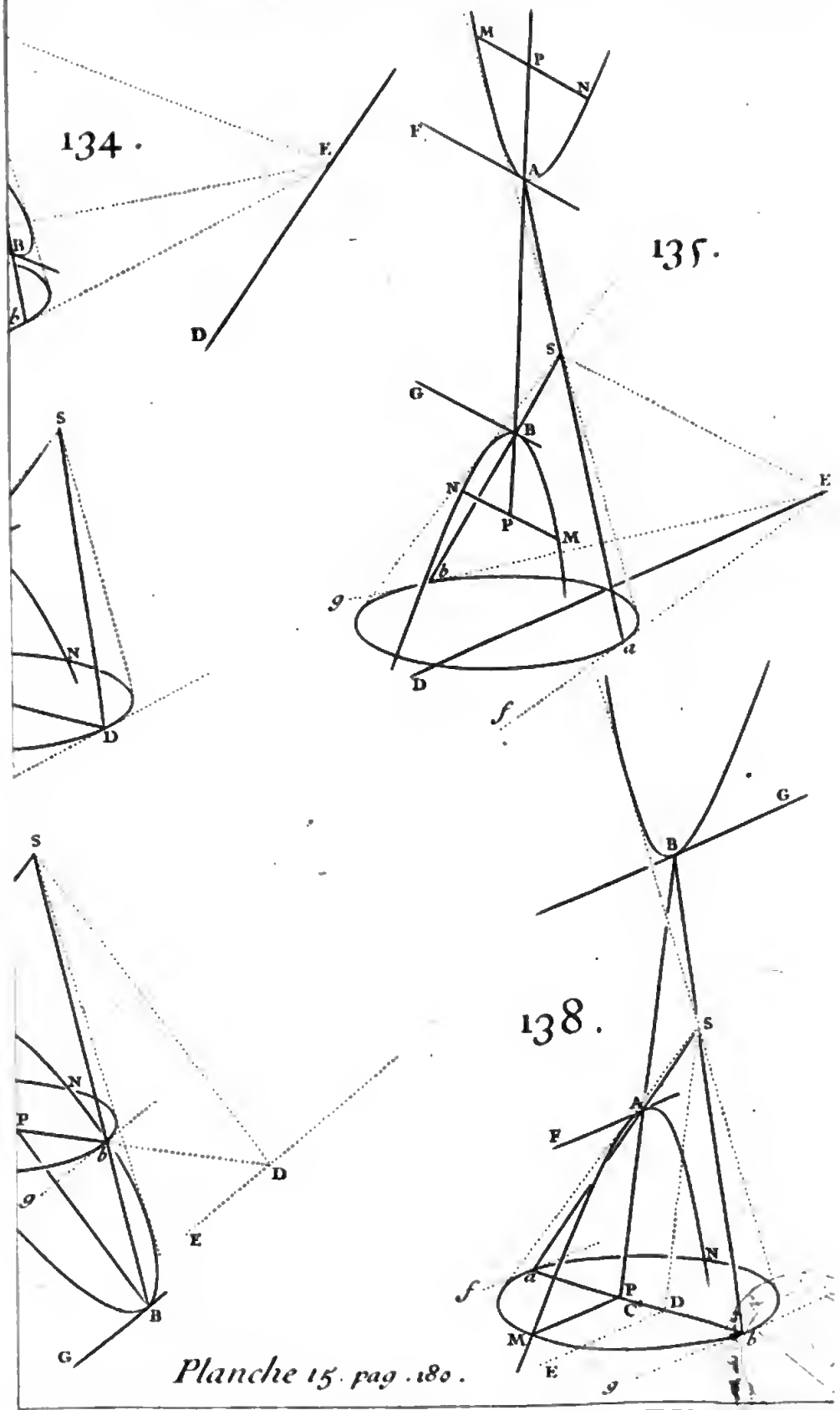
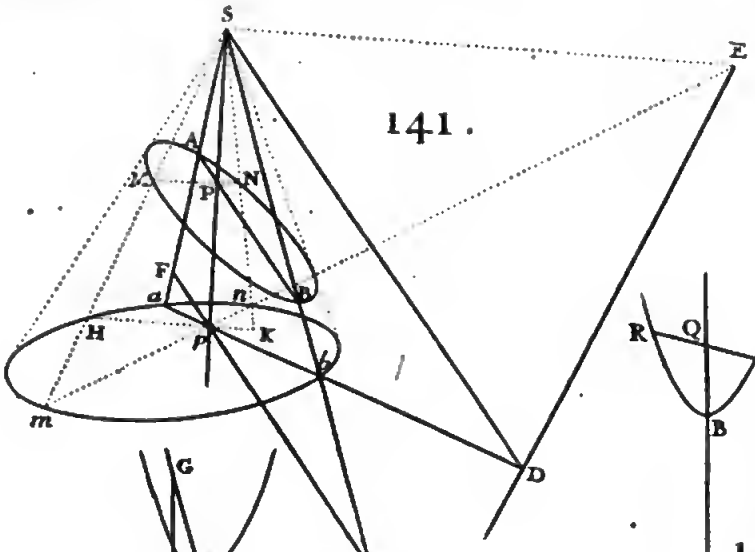
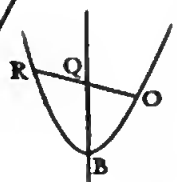


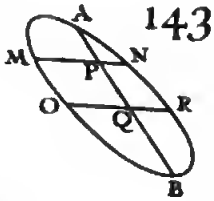
Planche 15. pag. 180.



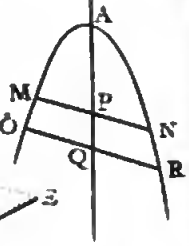
141.

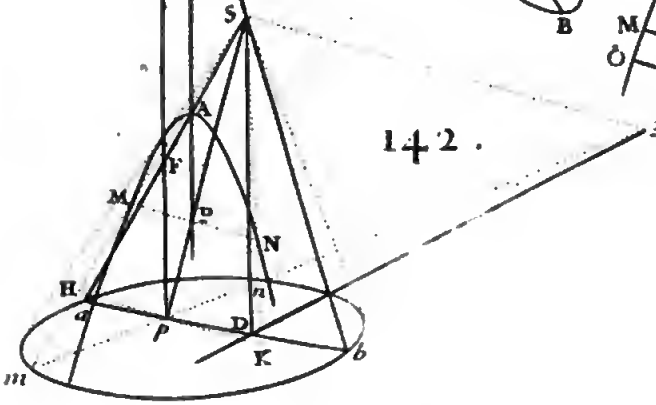


144

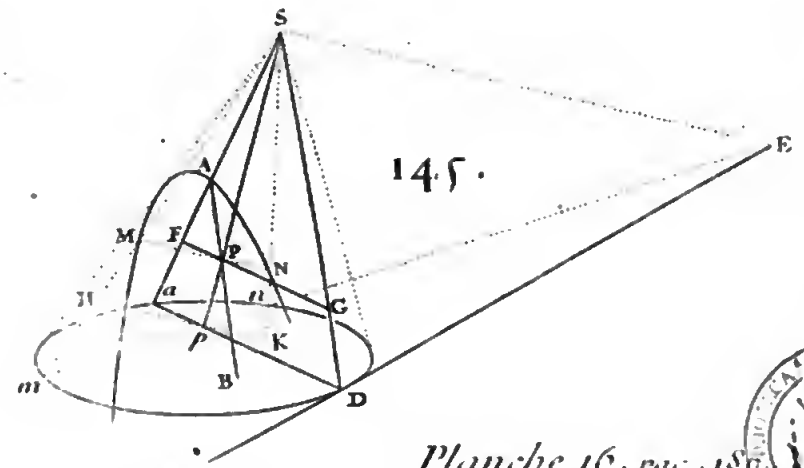


143.





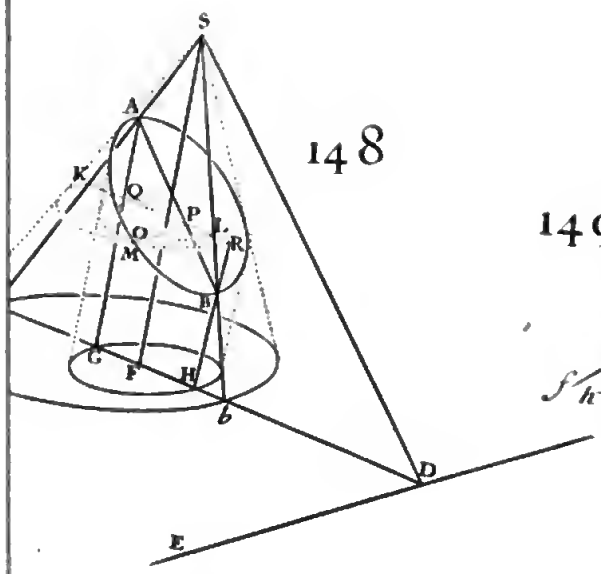
142.



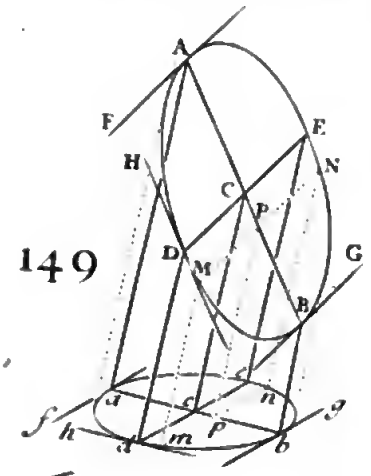
145.

Planche 16. pag. 18

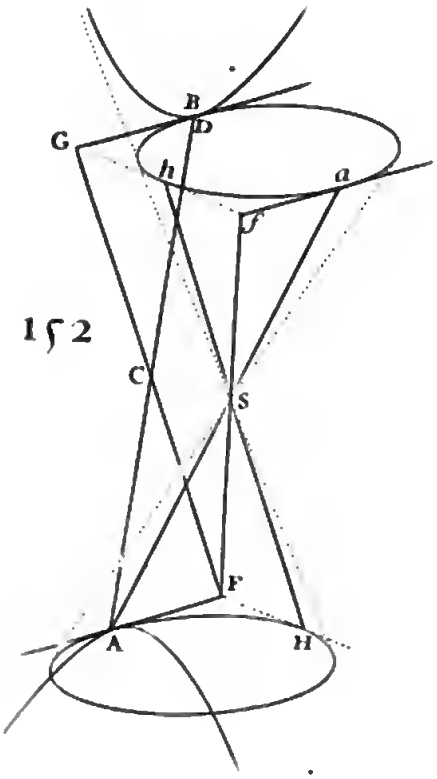
Digitized by Google



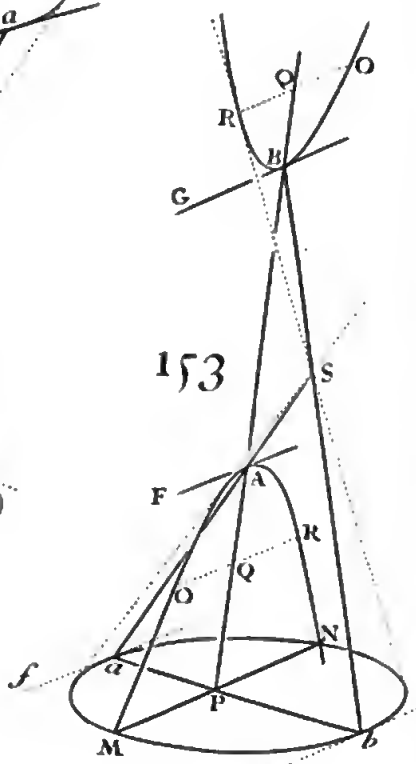
148



149



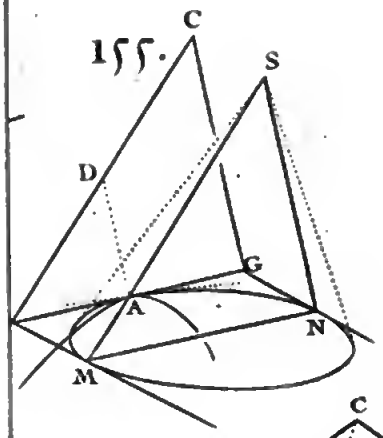
152



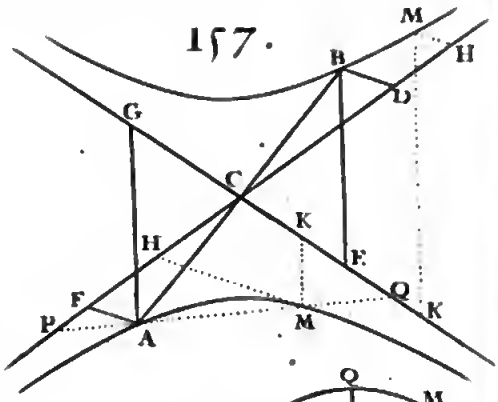
153

Planche 17. pag. 200.

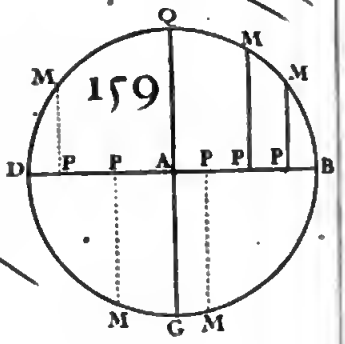
155.

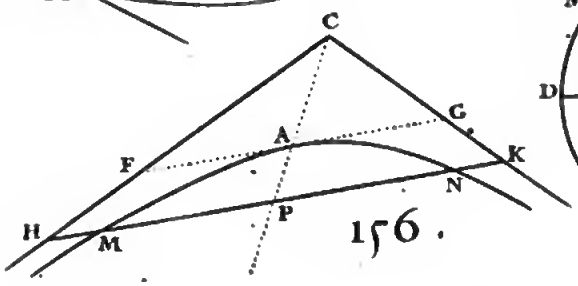


157.



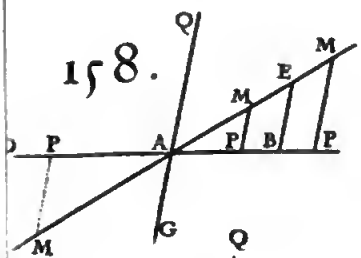
159

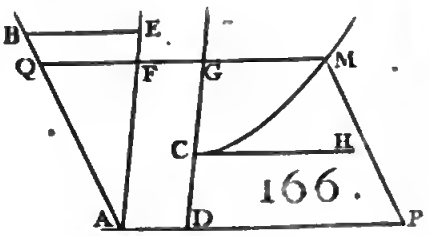




156.

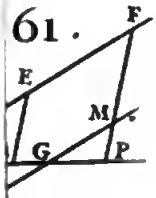
158.

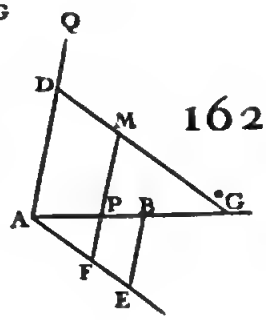




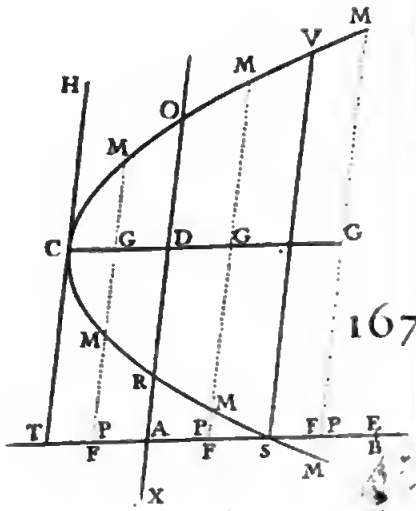
166.

61.

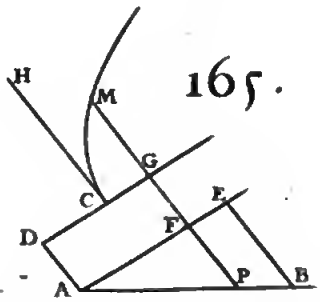




162.

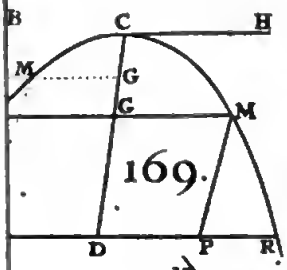


167.

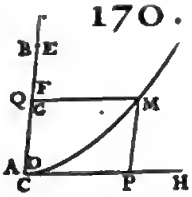


165.

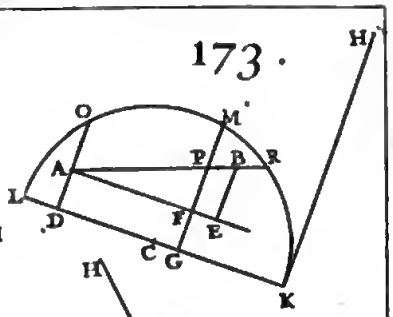
Planche 18. pag. 220.



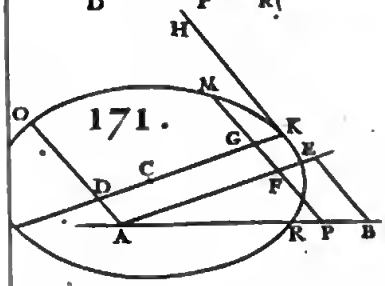
169.



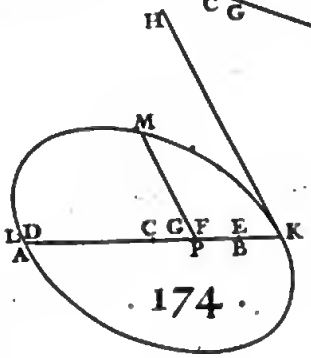
170.



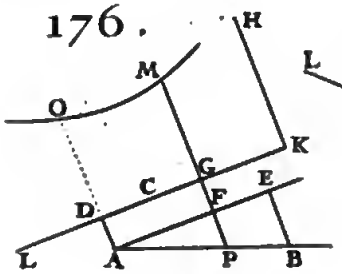
173.



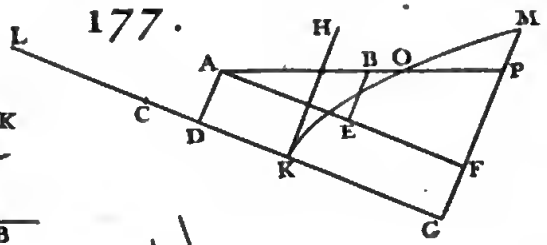
171.



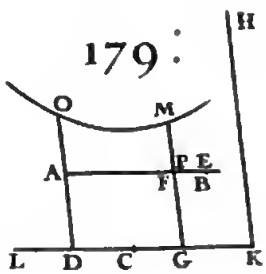
174.



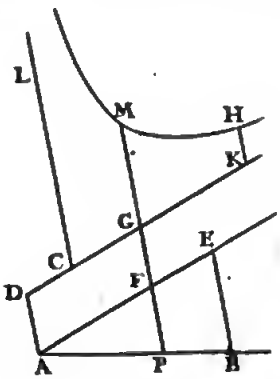
176.



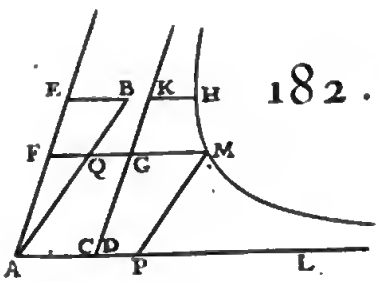
177.



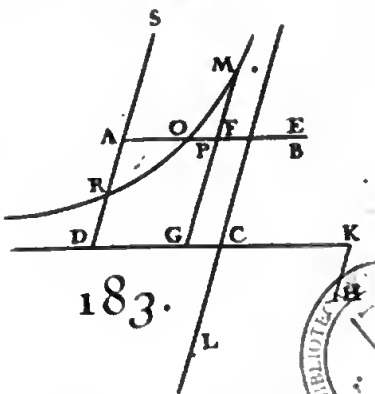
179.



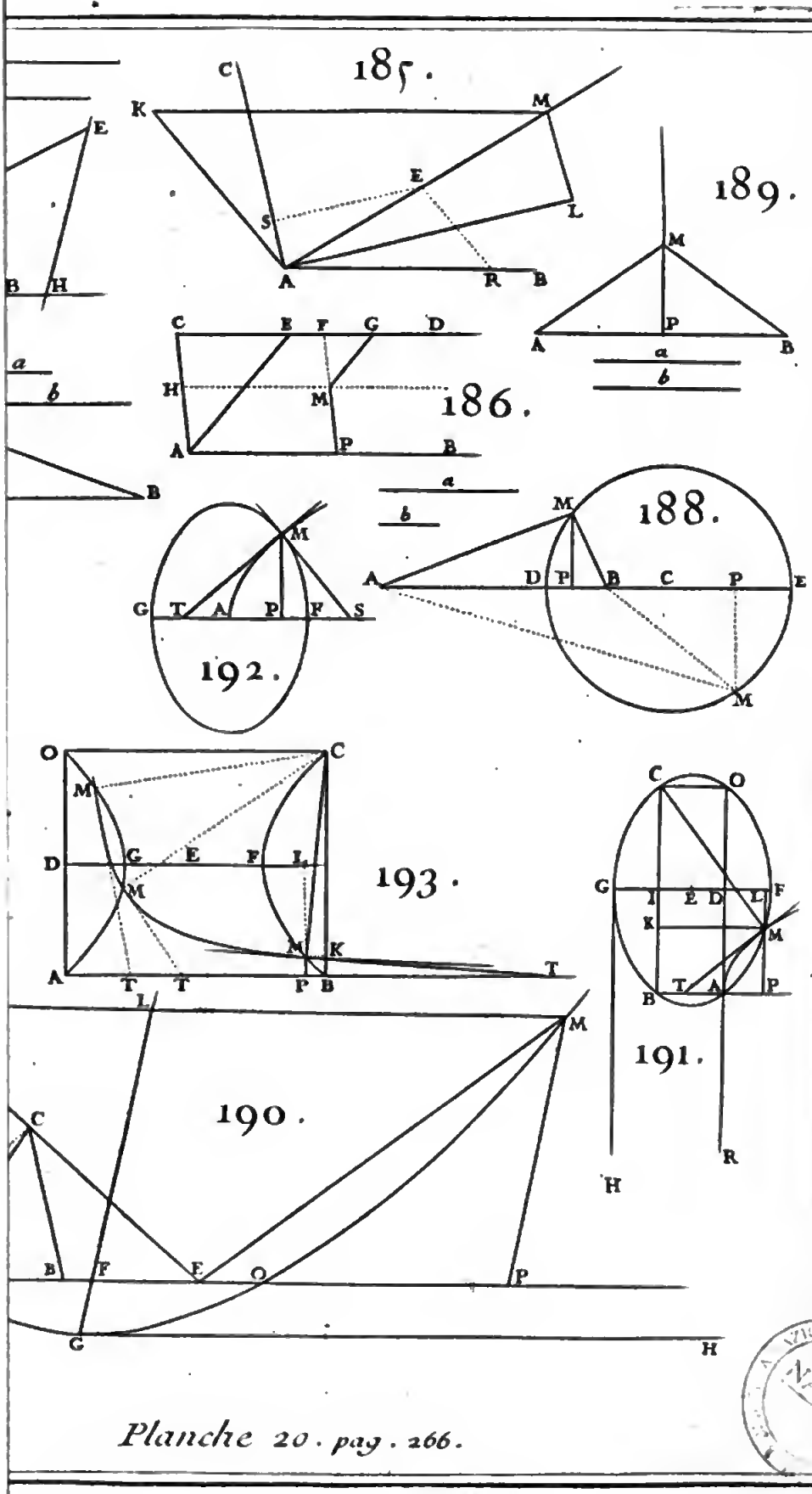
180.

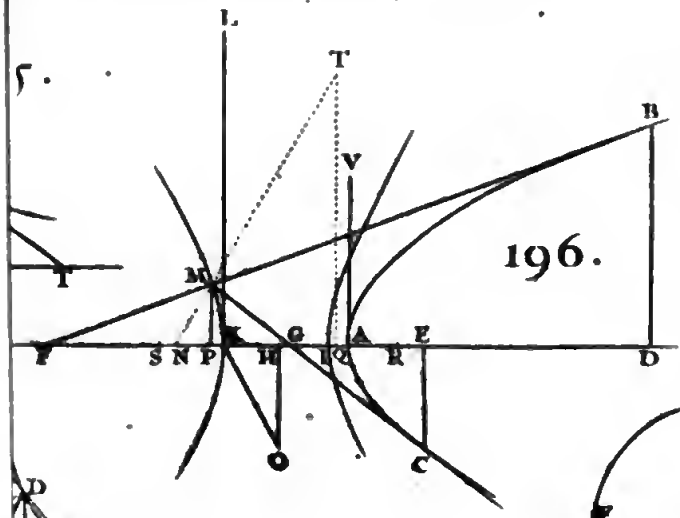


182.

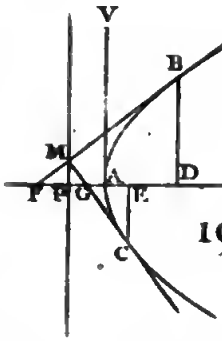


183.

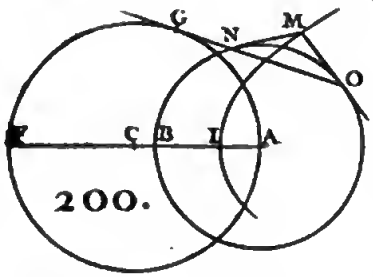

185.
189.
186.
188.
192.
193.
191.
190.
Planche 20. pag. 266.



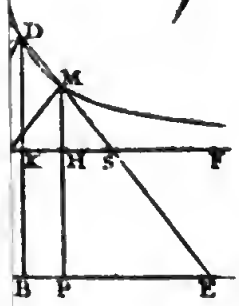
196.

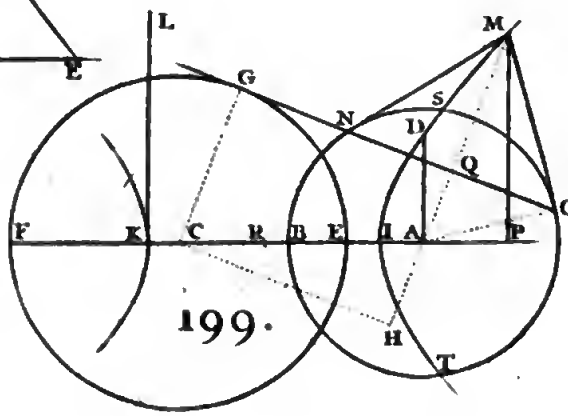


197.



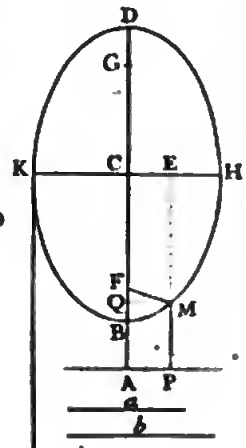
200.



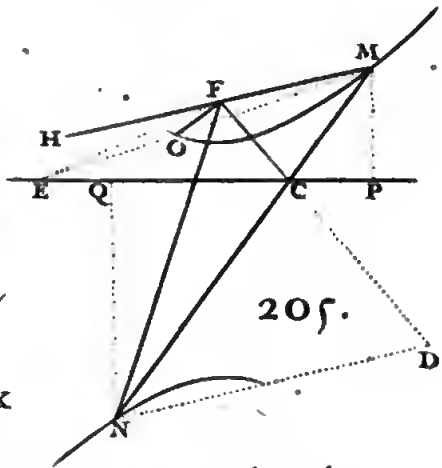


199.

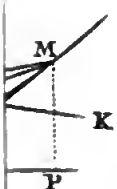
202.

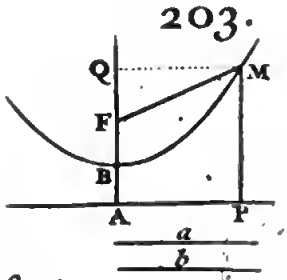


201.



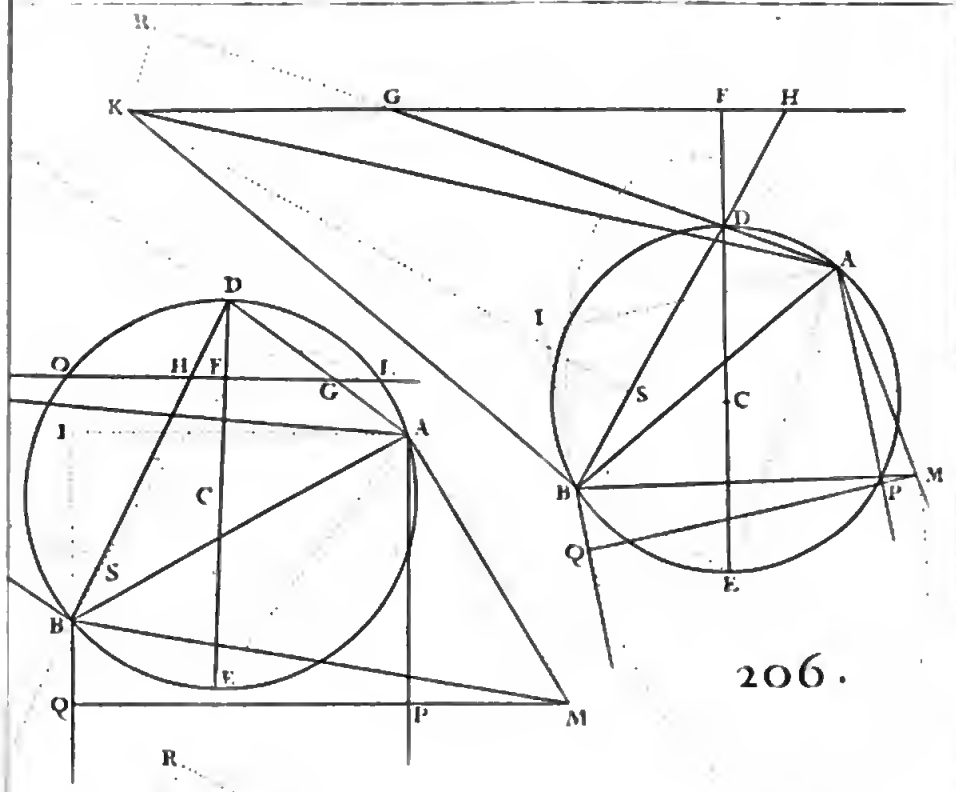
205.





203.

Planche 21. pag. 282.



206.

208.

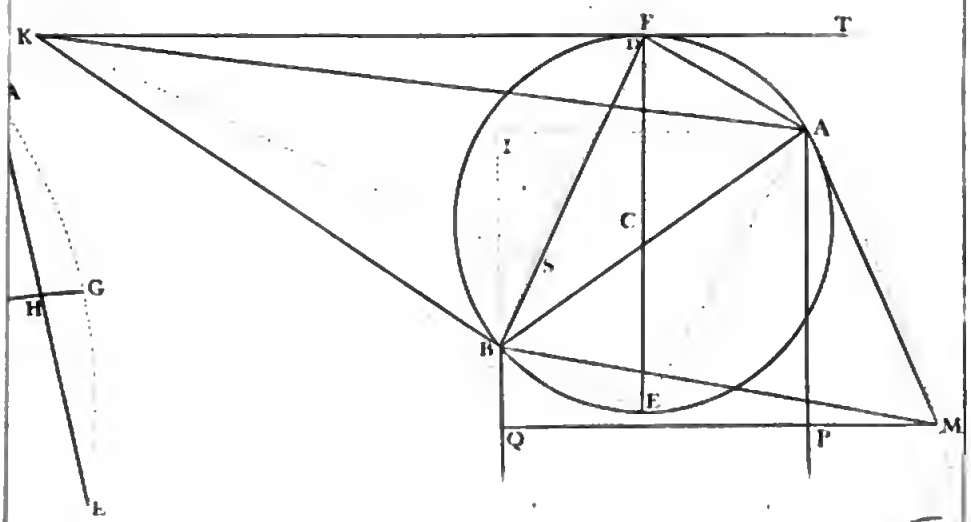
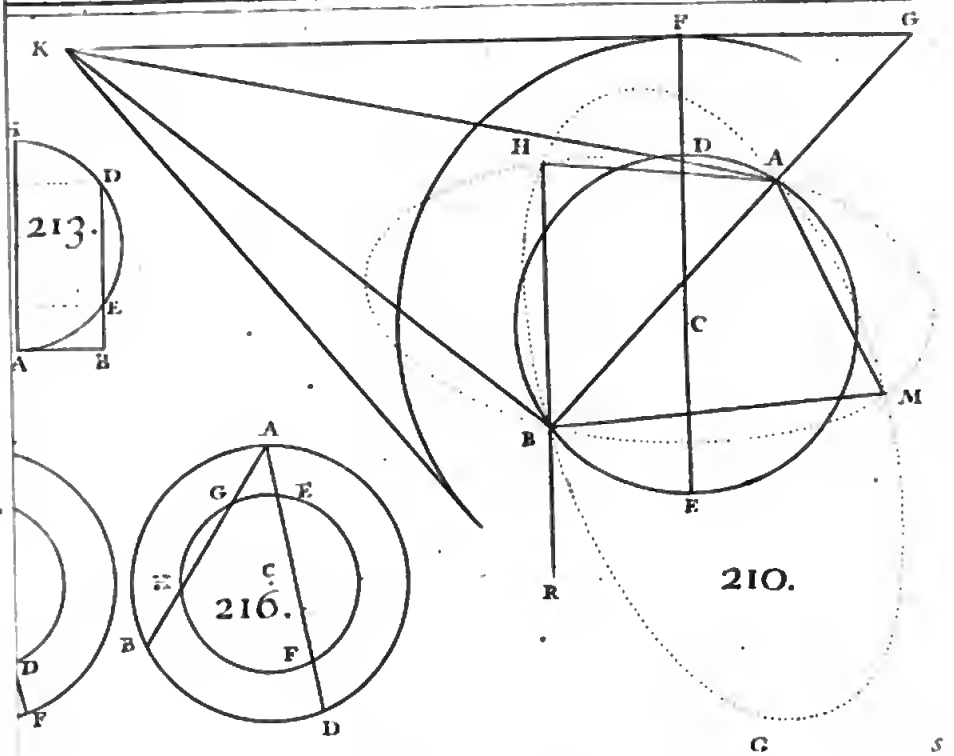


Planche 22 . pag . 288 .



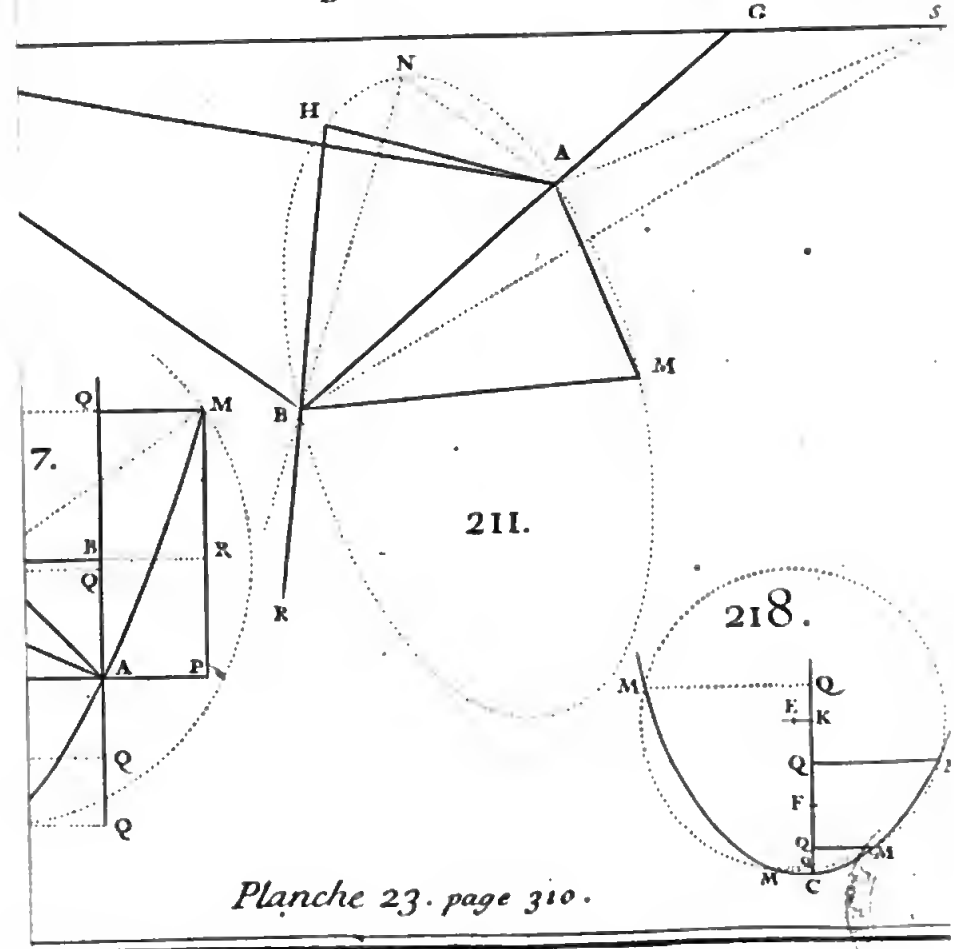
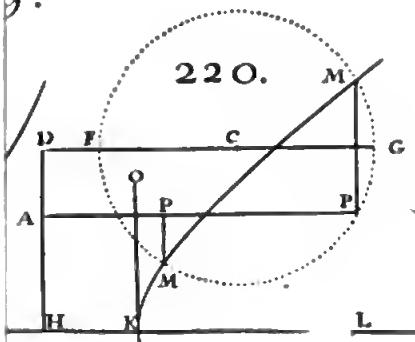
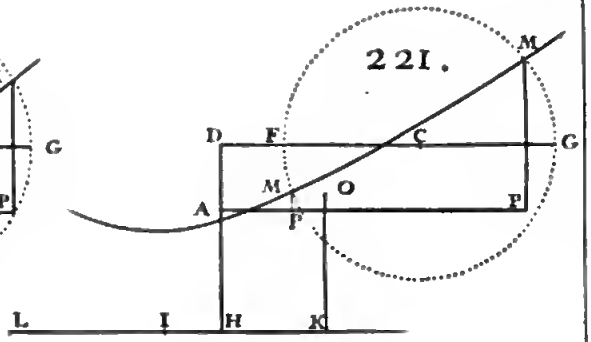


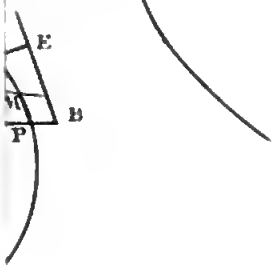
Planche 23. page 310.

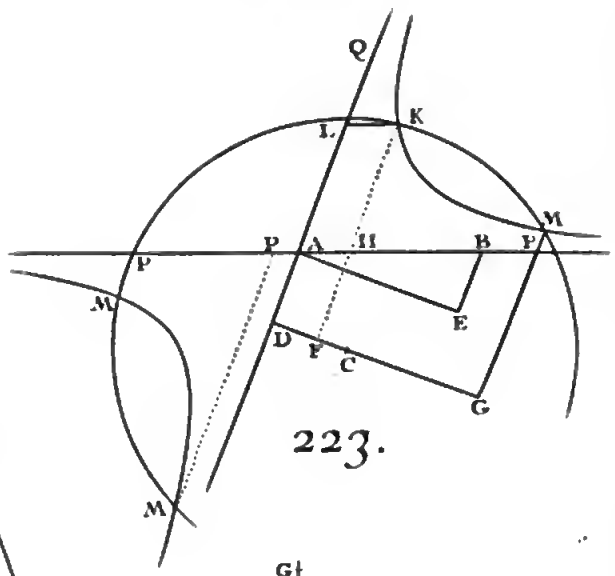
220.



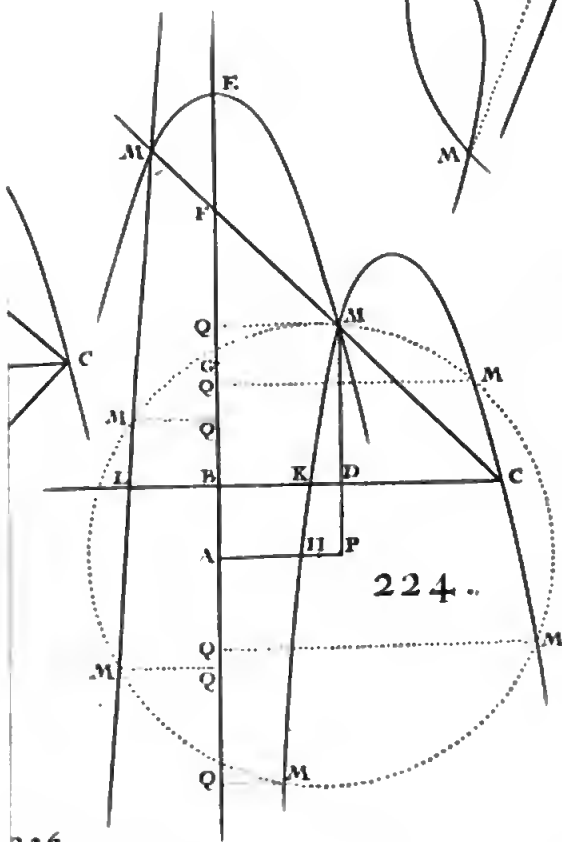
221.



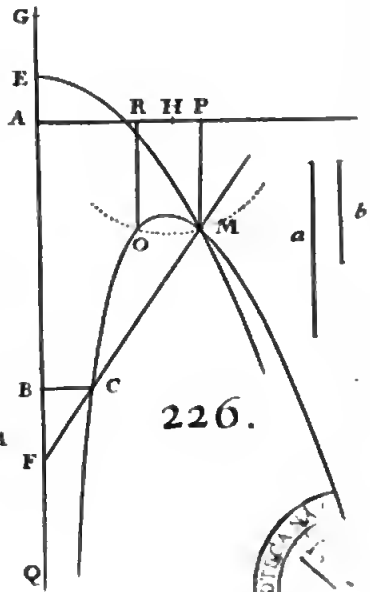




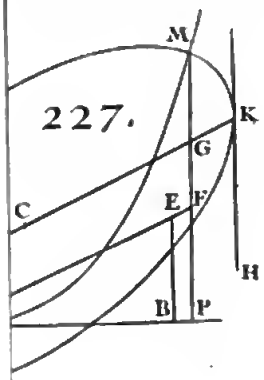
223.



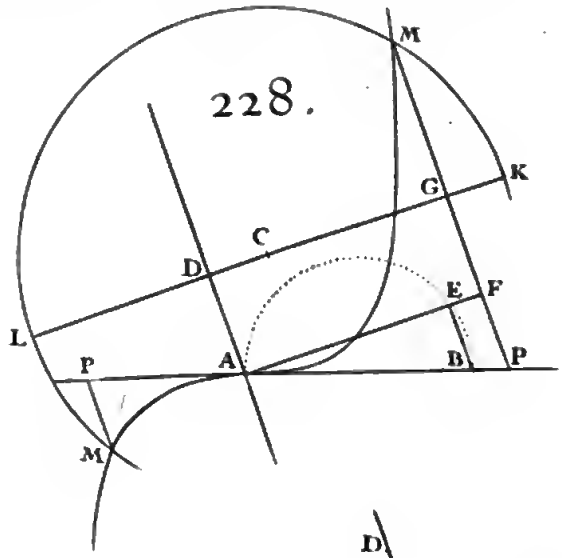
224.



226.

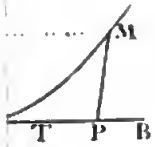


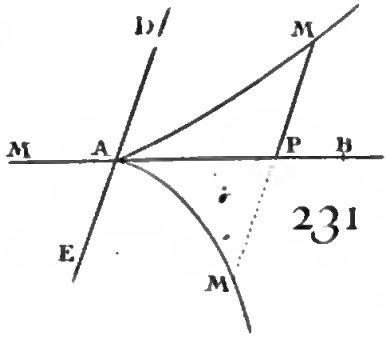
227.



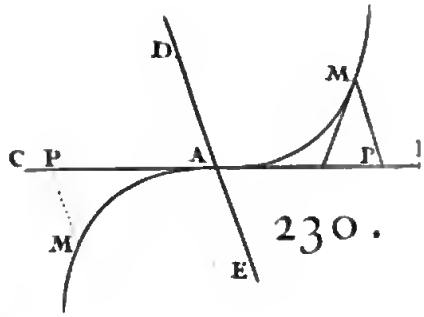
228.

229

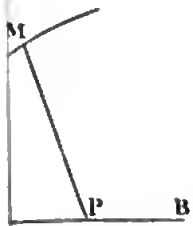




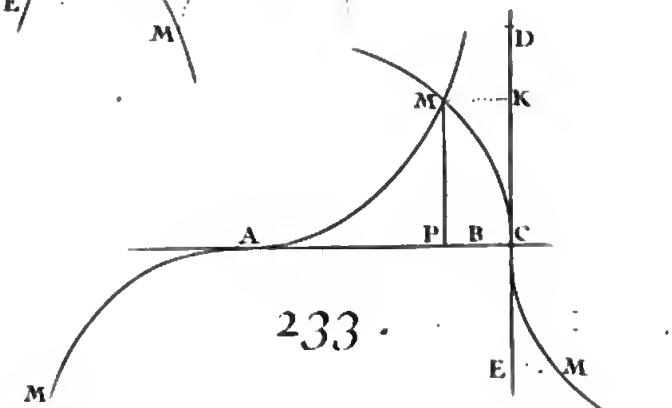
231



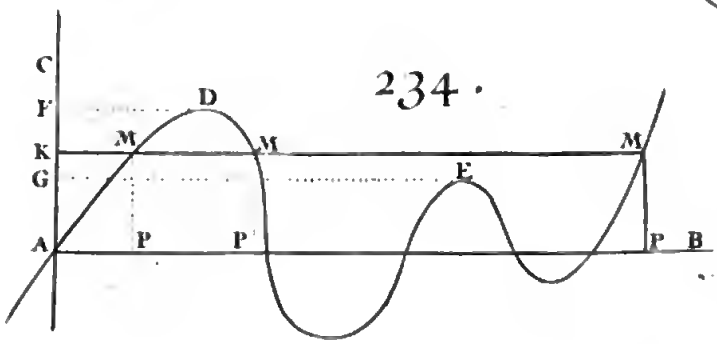
230.



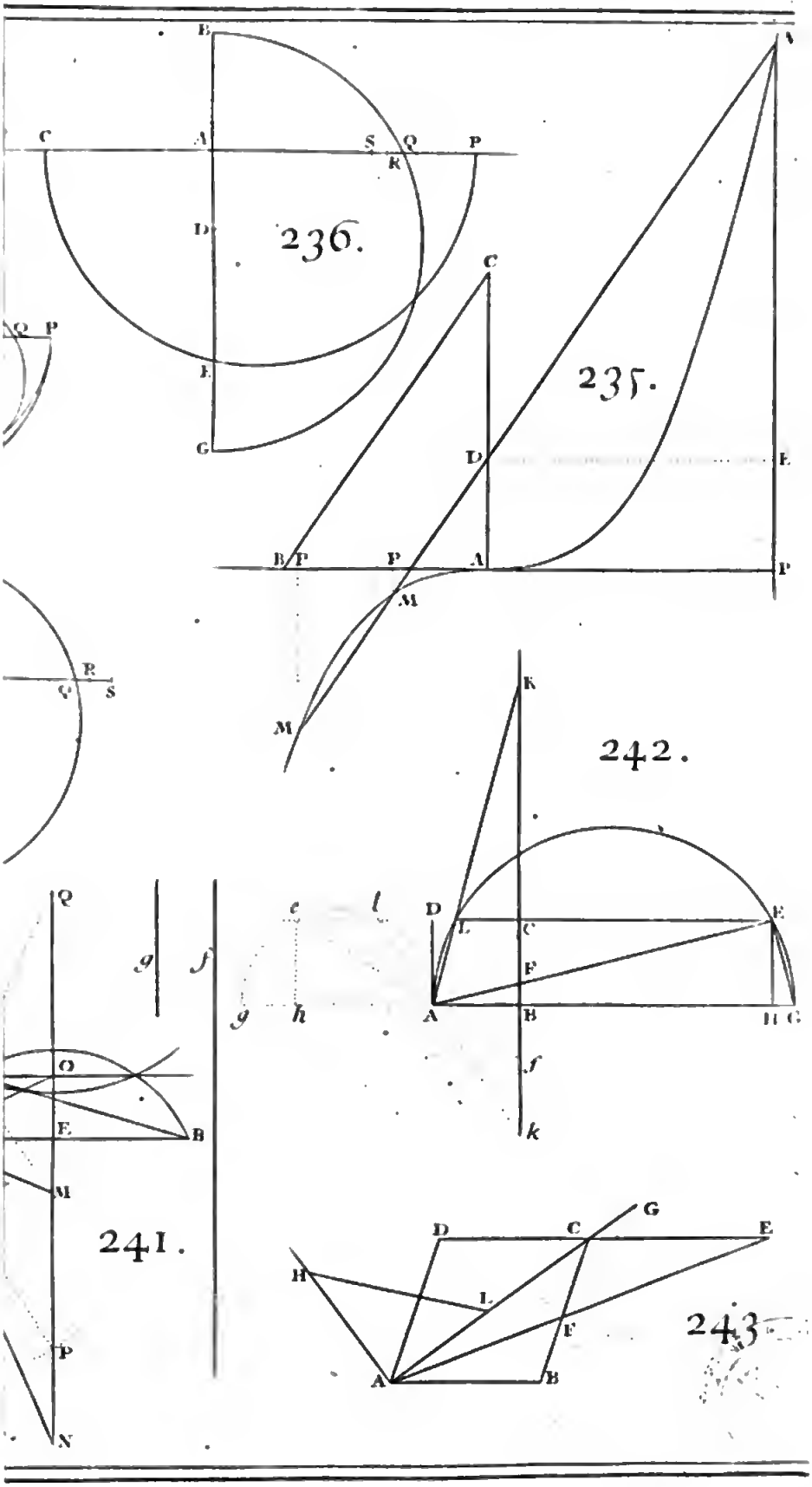
232.



233.



234.


B
C
A
S
Q
P
R
D
E
G
236.
C
D
B
P
P
A
M
235.
E
P
M
K
242.
D
L
C
E
F
A
B
H
G
f
k
Q
g
f
e
l
g
h
O
E
B
M
241.
P
N
D
C
G
E
H
L
F
A
B
243.

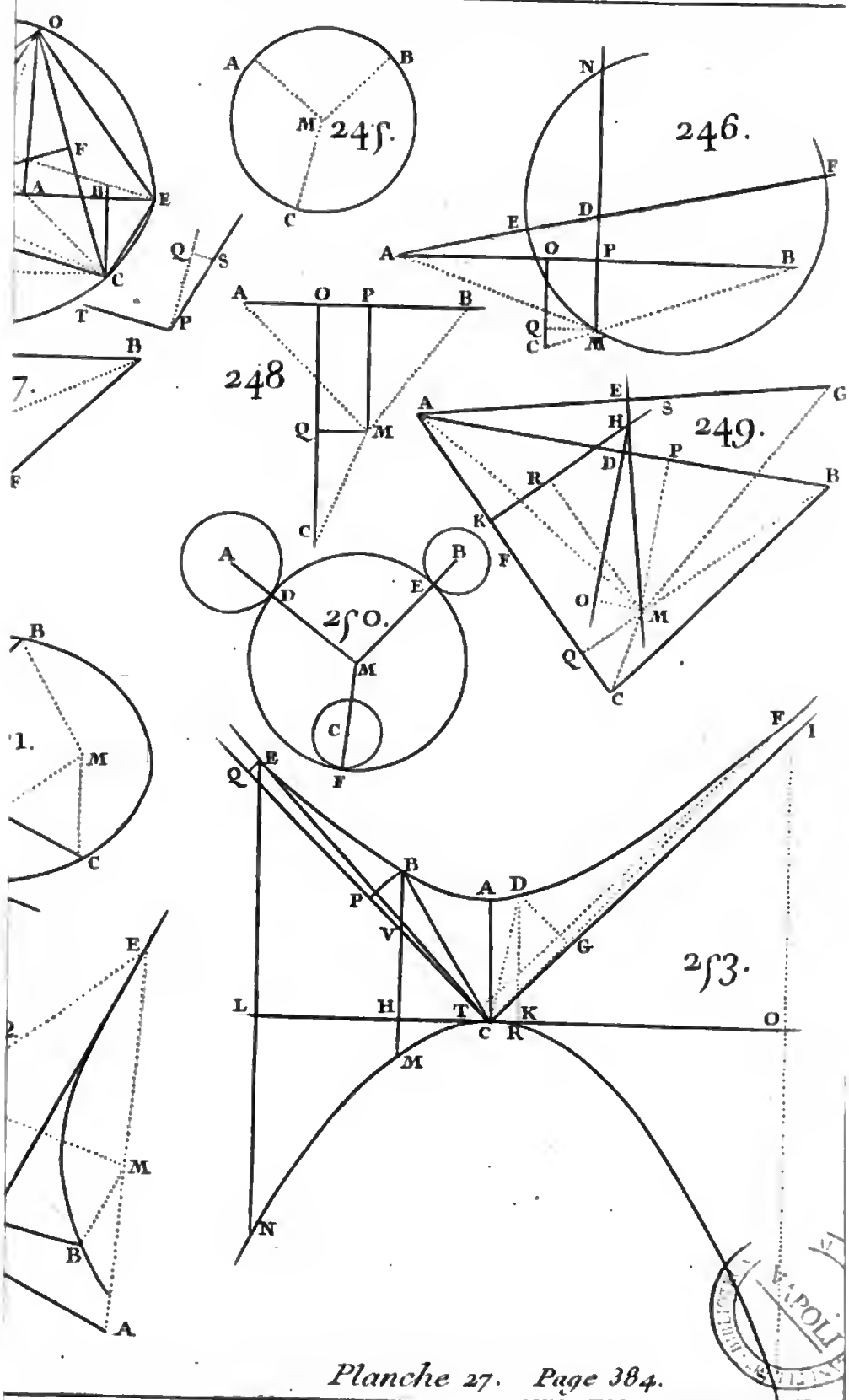
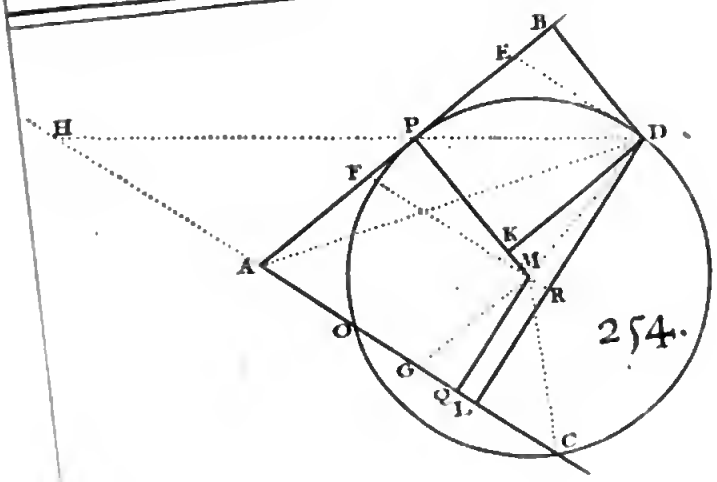
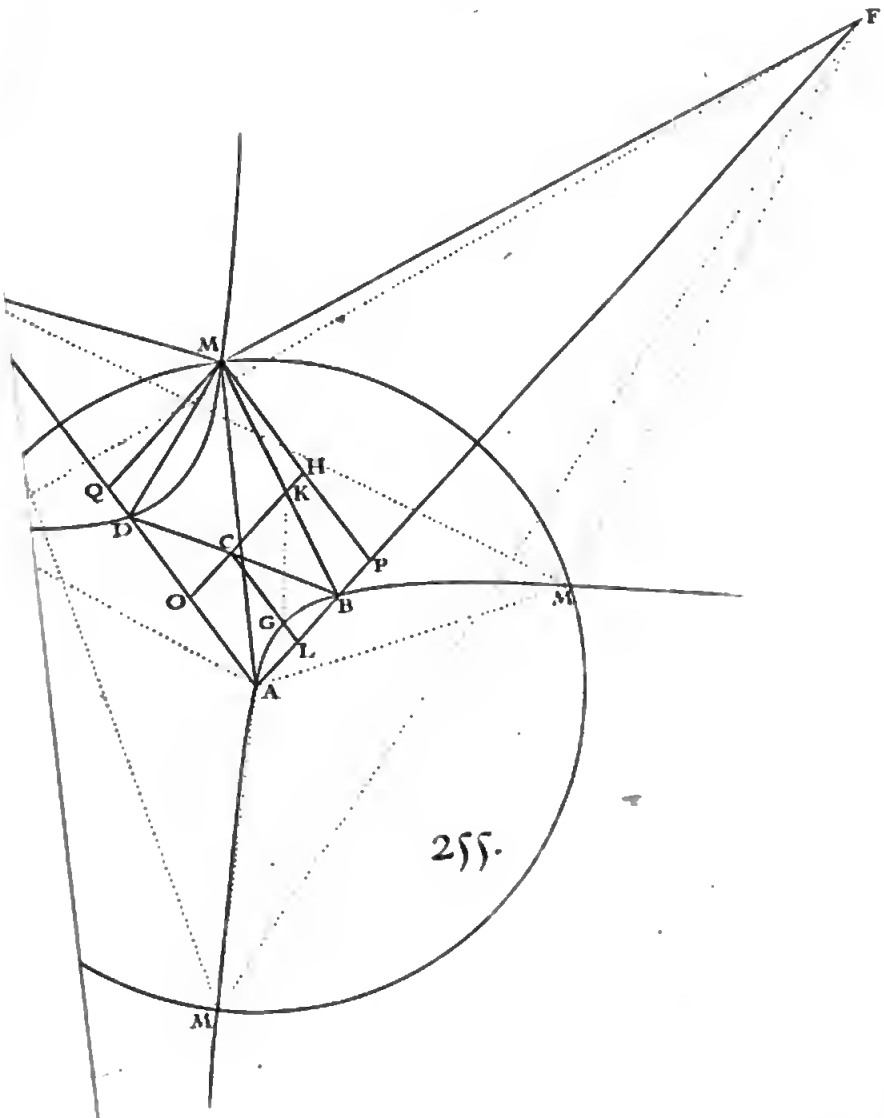


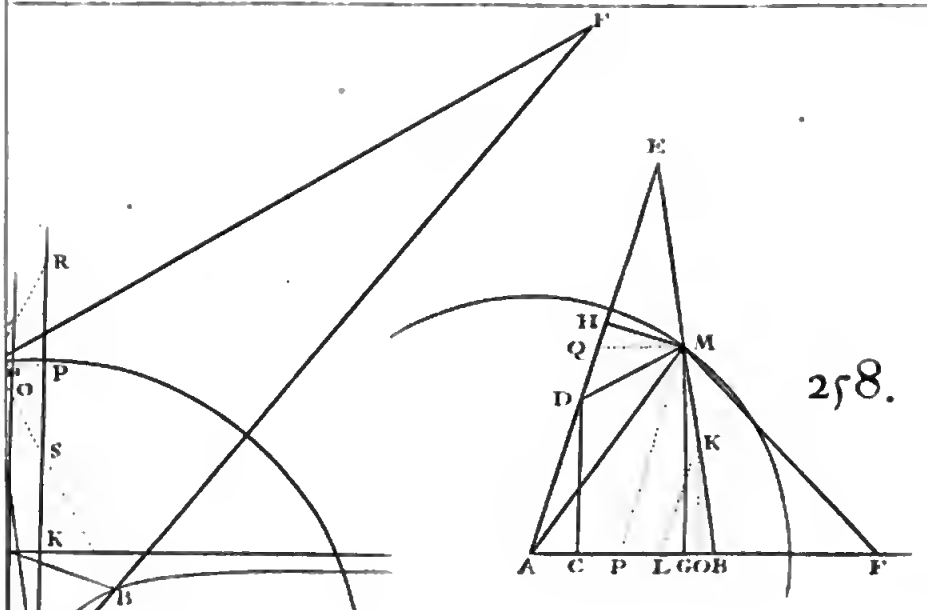
Planche 27. Page 384.



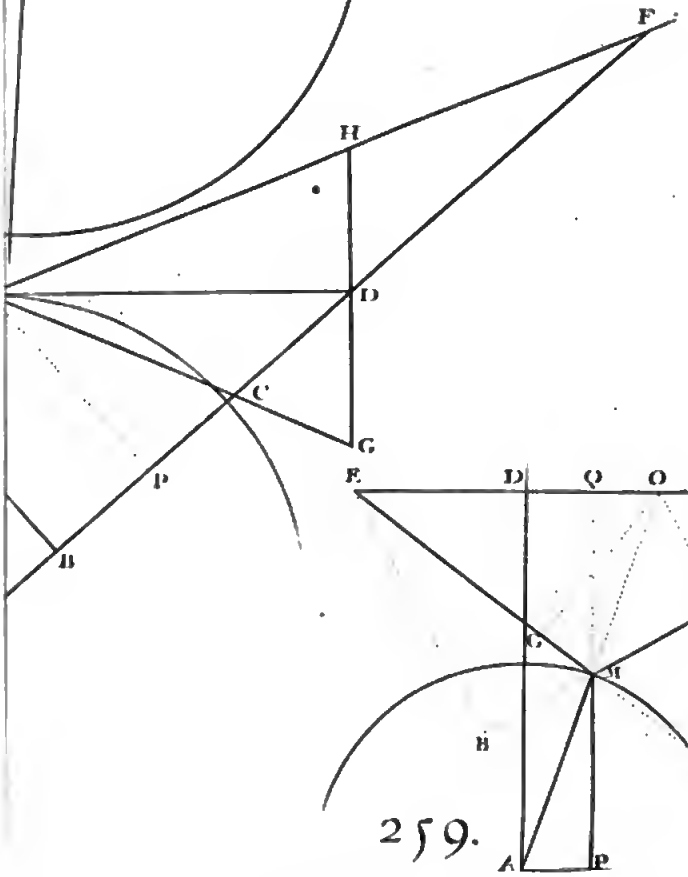
254.



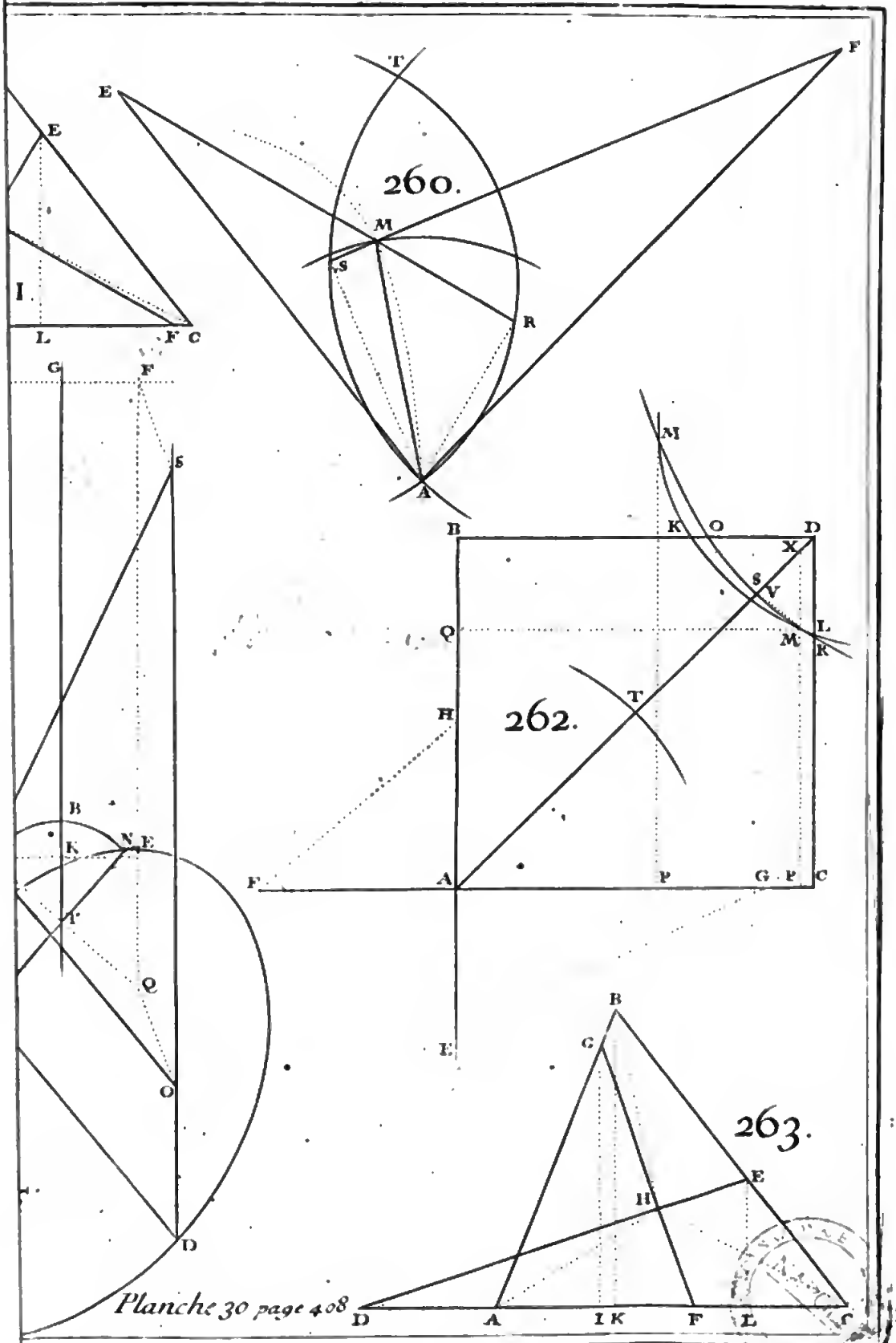
255.

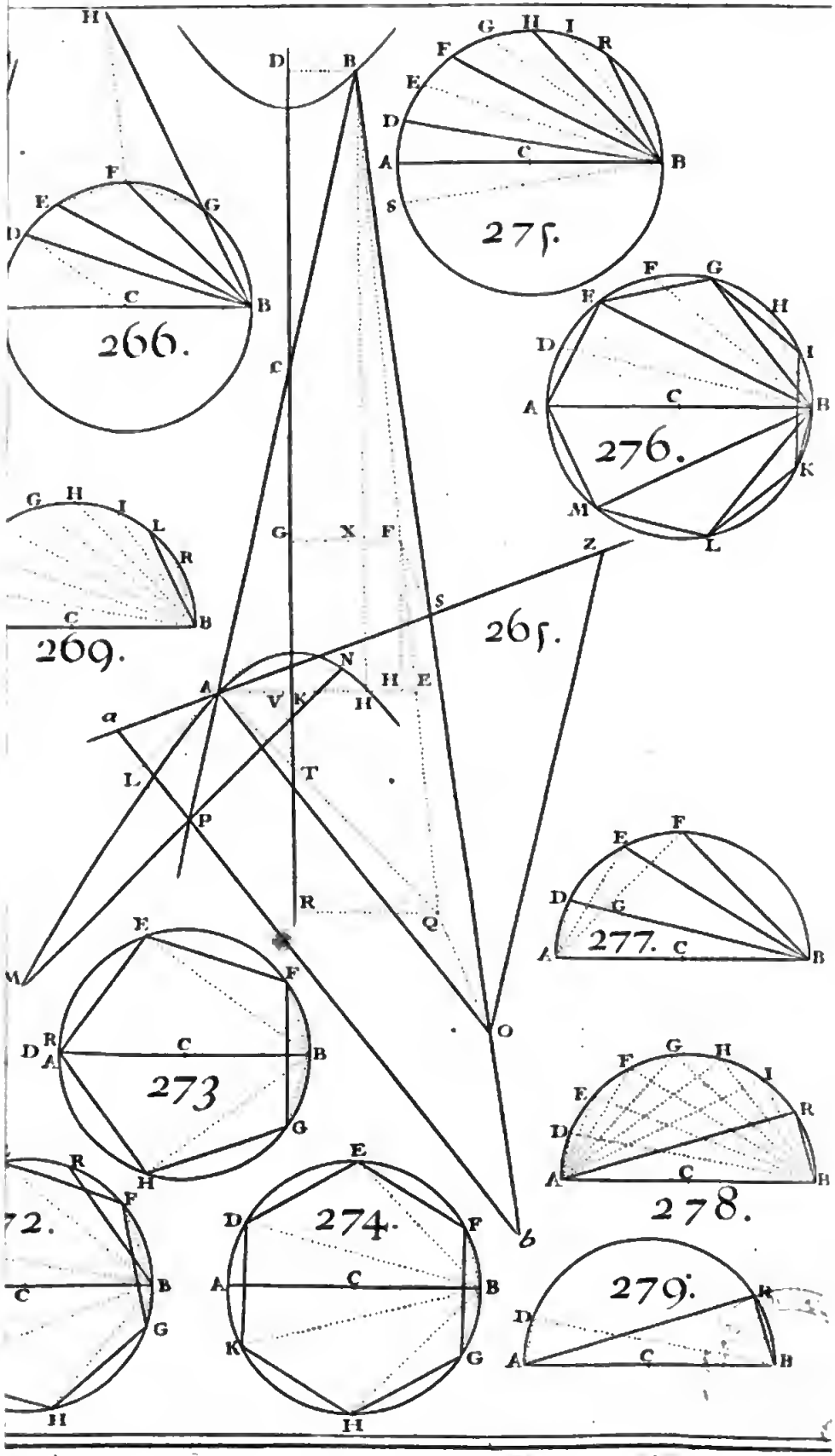


258.



259.


260.
262.
263.
I.
Planche 30 page 408


266.
275.
276.
269.
265.
277.
273
278.
272.
274.
279.

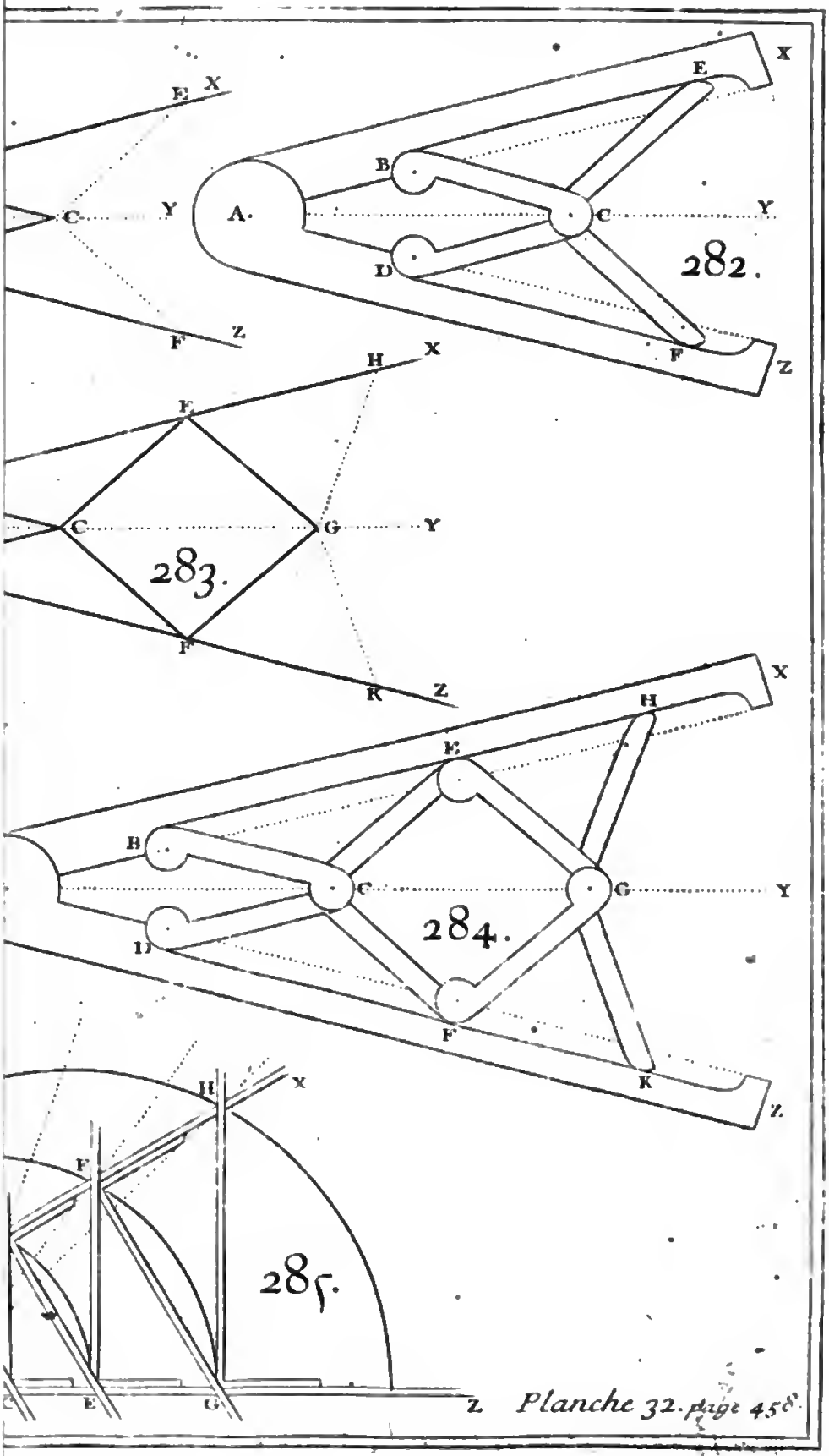
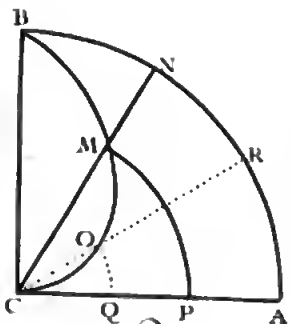
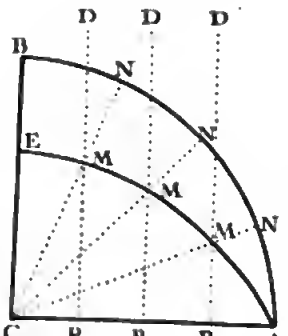


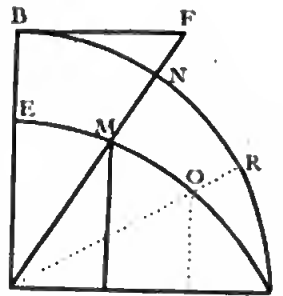
Planche 32. page 458.



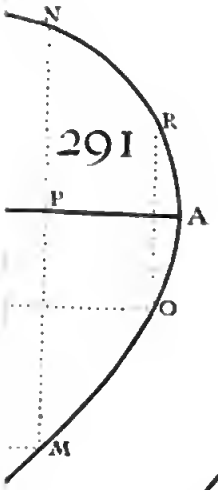
287



288

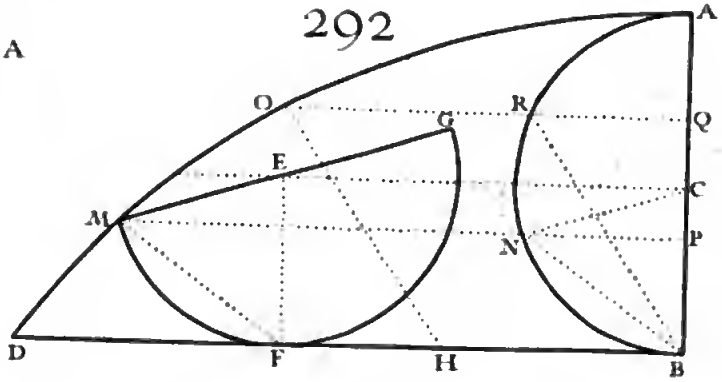


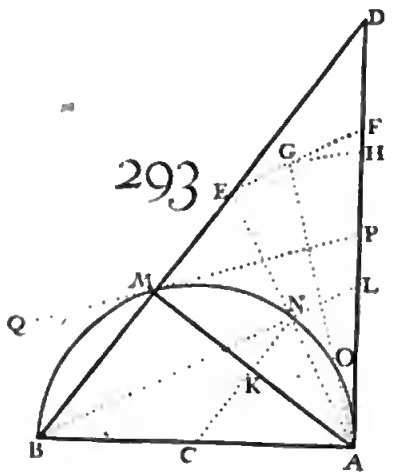
289



291

292





293

Digitized by Google